Produits et coproduits

Marc Lorenzi

6 novembre 2026

Résumé

Quel rapport y a-t-il entre le produit cartésien de deux ensembles et le pgcd de deux entiers relatifs ? Je vais montrer dans cet article qu'il s'agit de la même chose.

1 Isomorphismes

J'ai déjà un peu parlé, dans le premier chapitre, de la notion d'isomorphisme dans une catégorie. Nous allons ici creuser la question. Celle-ci est essentielle en théorie des catégories. En effet, la plupart des objets que l'on construit dans une catégorie sont « uniques à isomorphisme près », voire « uniques à isomorphisme unique près ». Nous verrons deux exemples de telles constructions dans les sections suivantes, quand nous parlerons de produits et de coproduits.

1.1 Notion d'isomorphisme

Définition 1. Soient a et b deux objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Une flèche $f : a \longrightarrow b$ est un *isomorphisme de a sur b* si et seulement si il existe une flèche $g : b \longrightarrow a$ telle que $g \circ f = \mathbb{1}_a$ et $f \circ g = \mathbb{1}_b$.

Dans la catégorie **Sets** des ensembles, les isomorphismes sont les bijections. Nous verrons plus loin d'autres exemples et là, adieu les bijections.

Proposition 1. *Soit $f : a \longrightarrow b$ un isomorphisme de a sur b. Il existe une unique flèche $g : b \longrightarrow a$ telle que $g \circ f = \mathbb{1}_a$ et $f \circ g = \mathbb{1}_b$.*

Démonstration. L'existence résulte de la définition d'un isomorphisme. Montrons l'unicité. Soient $g : b \longrightarrow a$ et $h : b \longrightarrow a$ telles que $g \circ f = h \circ f = \mathbb{1}_a$ et $f \circ g = f \circ h = \mathbb{1}_b$. On a

$$g = g \circ \mathbb{1}_b = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathbb{1}_a \circ h = h$$

Remarquons l'usage de l'associativité de $\circ$ pour la troisième égalité. □

Définition 2. Soit $f : a \longrightarrow b$ un isomorphisme. L'unique flèche $g : b \longrightarrow a$ telle que $g \circ f = \mathbb{1}_a$ et $f \circ g = \mathbb{1}_b$ est la *flèche réciproque* de f. On la note f^{-1}.

Proposition 2. *La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.*

Démonstration. Soient $f : a \longrightarrow b$ et $g : b \longrightarrow c$ deux isomorphismes. On a

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ \mathbb{1}_b \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= \mathbb{1}_c\end{aligned}$$

et, de même,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathbb{1}_a$$

Ainsi, $g \circ f$ est un isomorphisme et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Encore une fois, l'associativité de la composition est essentielle. □

Proposition 3. *La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : a \longrightarrow b$ un isomorphisme. Les deux égalités $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_a$ et $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_b$ nous disent que f^{-1} est un isomorphisme et $(f^{-1})^{-1} = f$. □

1.2 Objets isomorphes

Définition 3. Soient a et b deux objets de la catégorie $\mathcal{C}$. L'objet a est *isomorphe* à l'objet b si et seulement si il existe un isomorphisme de a sur b. Nous noterons $a \cong b$ lorsque a est isomorphe à b.

Proposition 4. *La relation $\cong$ est une relation d'équivalence sur la classe des objets de $\mathcal{C}$.*

Je ne dis pas « l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ » parce qu'il se peut que les objets de $\mathcal{C}$ ne forment pas un ensemble. Par exemple, les objets de la catégorie **Set** sont les ensembles, et l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. En fait une catégorie est appelée une *petite catégorie* lorsque

- La classe des objets de $\mathcal{C}$ est un ensemble.
- Pour tous objets a et b, la classe des flèches de domaine a et de codomaine b est un ensemble.

Démonstration. Soit a un objet. Comme $\mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_a = \mathbb{1}_a$, la flèche $\mathbb{1}_a$ est un isomorphisme de a sur a. Ainsi, $a \cong a$.

Soient a et b deux objets. Soit $f : a \longrightarrow b$ un isomorphisme de a sur b. La flèche $f^{-1} : b \longrightarrow a$ est alors un isomorphisme de b sur a, donc $b \cong a$.

Soient enfin a, b et c trois objets. Soient $f : a \to b$ et $g : b \longrightarrow c$ deux isomorphismes. La flèche $g \circ f : a \longrightarrow c$ est un isomorphisme, donc $a \cong c$. □

1.3 La catégorie $\mathcal{Z}$

Pour tous entiers relatifs a et b, a divise b si et seulement si il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ac$. On note alors $a|b$. La relation « divise » est un *préordre* sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, c'est à dire qu'elle vérifie les deux propriétés suivantes.

- Réflexivité : pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a|a$.
- Transitivité : pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.

En revanche, cette relation n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique. Plus précisément, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $a|b$ et $b|a$ si et seulement si $b = \pm a$.

Nous allons construire une catégorie $\mathcal{Z}$.

- Les objets de $\mathcal{Z}$ sont les entiers relatifs.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, si a divise b alors il existe une et une seule flèche de domaine a et de codomaine b. Sinon, il n'existe aucune flèche de domaine a et de codomaine b.

Il reste à définir la composée de deux flèches. Soient $f : a \longrightarrow b$ et $g : b \longrightarrow c$, où $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ceci signifie que a divise b et b divise c. Par la transitivité de la relation divise, a divise c. On pose alors $g \circ f = a \longrightarrow c$, l'unique flèche de domaine a et de codomaine c. En bref,

$$(b \longrightarrow c) \circ (a \longrightarrow b) = (a \longrightarrow c)$$

Proposition 5. *$\mathcal{Z}$ est une catégorie.*

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in \mathcal{Z}$. Soient $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ et $h : c \longrightarrow d$. On a

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f &= ((c \longrightarrow d) \circ (b \longrightarrow c) \circ (a \longrightarrow b) \\ &= (b \longrightarrow d) \circ (a \longrightarrow b) \\ &= a \longrightarrow d\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}h \circ (g \circ f) &= (c \longrightarrow d) \circ ((b \longrightarrow c) \circ (a \longrightarrow b)) \\ &= (c \longrightarrow d) \circ (a \longrightarrow c) \\ &= a \longrightarrow d\end{aligned}$$

Ainsi, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, posons $\mathbb{1}_a = (a \longrightarrow a)$. Remarquons que $\mathbb{1}_a$ existe bien, parce que la relation « divise » est réflexive, et donc $a|a$. Soit $f = b \longrightarrow a$ où $b \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\mathbb{1}_a \circ f = \mathbb{1}_a \circ (b \longrightarrow a) = (a \longrightarrow a) \longrightarrow (b \longrightarrow a) = (b \longrightarrow a) = f$$

De même, si $f : a \longrightarrow b$, alors $f \circ \mathbb{1}_a = f$. □

Maintenant que nous savons que $\mathcal{Z}$ est une catégorie, posons-nous la question suivante : quand deux entiers relatifs sont-ils isomorphes ?

Proposition 6. *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On a $a \cong b$ si et seulement si $b = \pm a$.*

Démonstration. Supposons $a \cong b$. Soit $f : a \longrightarrow b$ un isomorphisme de a sur b. Soit $g = f^{-1}$. On a $f : a \longrightarrow b$ et $g : b \longrightarrow a$ donc, par définition des flèches dans la catégorie $\mathcal{Z}$, a divise b et b divise a, donc $b = \pm a$. Inversement, supposons $b = \pm a$. On a donc que a divise b et b divise a. Il existe ainsi deux flèches (et pas trois, ni quatre) $f : a \longrightarrow b$ et $g : b \longrightarrow a$. On a alors $g \circ f : a \longrightarrow a$. Mais $\mathbb{1}_a$ est l'unique flèche de domaine a et de codomaine a, donc $g \circ f = \mathbb{1}_a$. De même, $f \circ g = \mathbb{1}_b$. Ainsi, $a \cong b$. □

2 Produits

2.1 Qu'est-ce qu'un produit ?

Définition 4. Soient a et b deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un *produit* de a et b est un triplet $(a \times b, p_a, p_b)$ où $a \times b$ est un objet, $p_a : a \times b \longrightarrow a$ et $p_b : a \times b \longrightarrow b$ sont deux flèches, vérifiant la propriété suivante. Pour tout triplet (c, f, g) où c est un objet, $f : c \longrightarrow a$ et $g : c \longrightarrow b$, il existe une unique flèche $(f, g) : c \longrightarrow a \times b$ telle que $f = p_a \circ (f, g)$ et $g = p_b \circ (f, g)$.

Les flèches p_a et p_b sont appelées les *projections* de $a \times b$ sur a et b.

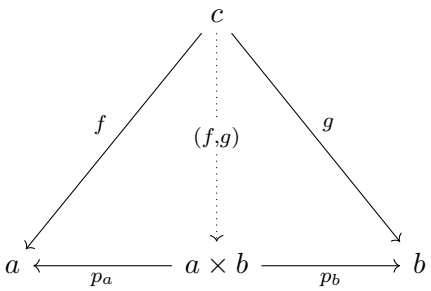


FIGURE 1 – Produit de deux objets

Gardons toujours à l'esprit que tout ceci est très général. Les flèches ne sont **PAS** des fonctions. Il n'y a pas de « $f(x)$ » ou d'autres choses analogues ! Nous allons regarder deux exemples.

2.2 La catégorie Set

Plaçons-nous dans la catégorie **Set**. Ici, les flèches **SONT** des fonctions. Il peut donc y avoir des « $f(x)$ », des « $p(x, y)$ », etc.

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Soit $p_A : A \times B \longrightarrow A$ définie par $p_A(x, y) = x$. De même, soit $p_B : A \times B \longrightarrow B$ définie par $p_B(x, y) = y$.

Proposition 7. *$(A \times B, p_A, p_B)$ est un produit de A et B.*

Démonstration. Soit C un ensemble. Soient $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$. Supposons qu'il existe une fonction $(f, g) : C \longrightarrow A \times B$ telle que $f = p_A \circ (f, g)$ et $g = p_B \circ (f, g)$. Pour tout $t \in C$, $(f, g)(t) \in A \times B$. On a donc $(f, g)(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ où $\varphi : C \longrightarrow A$ et $\psi : C \longrightarrow B$. Comme $f = p_A \circ (f, g)$, on a pour tout $t \in C$,

$$f(t) = p_A((f, g)(t)) = p_A(\varphi(t), \psi(t)) = \varphi(t)$$

Ainsi, $\varphi = f$ et, de même, $\psi = g$. Nous avons donc montré l'unicité de (f, g), si cette fonction existe. Inversement, soit $(f, g) : C \longrightarrow A \times B$ définie, pour tout $t \in C$, par

$$(f, g)(t) = (f(t), g(t))$$

On vérifie immédiatement que $f = p_A \circ (f, g)$ et $g = p_B \circ (f, g)$, d'où l'existence. □

2.3 La catégorie $\mathcal{Z}$

Plaçons-nous maintenant dans la catégorie $\mathcal{Z}$ dont nous avons parlé dans la première section.

Donnons-nous deux entiers relatifs a et b. Existe-t-il un produit de a et b ? Si oui, quels sont tous les produits de a et b ? Reprenons le schéma de la figure 1. Nous pouvons le simplifier en supprimant les noms des flèches puisque, dans la catégorie $\mathcal{Z}$, il y a au plus une flèche d'un objet vers un autre objet.

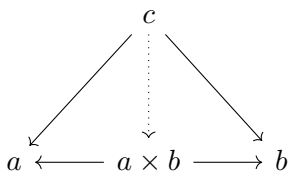


FIGURE 2 – Produit dans $\mathcal{Z}$

Rappelons-nous que l'existence d'une flèche signifie simplement que son domaine divise son codomaine. Ainsi, $a \times b$ est un produit de a et b si et seulement si

- $a \times b$ divise a.
- $a \times b$ divise b.
- Pour tout $c \in \mathbb{Z}$, si c divise a et c divise b, alors c divise $a \times b$.

Ces trois points caractérisent une notion bien connue ! Les produits de a et b sont les plus grands diviseurs communs de a et b. Ainsi, a et b possèdent exactement deux produits, et ces deux produits sont opposés (pour être totalement précis, si $a = b = 0$, il y a un seul produit, égal à 0). Remarquons que les deux produits de a et b sont isomorphes. En fait, cette propriété est générale.

2.4 Le cas général

Proposition 8. *Soient a et b deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Soient $(a \times b, p_a, p_b)$ et $((a \times b)', p'_a, p'_b)$ deux produits de a et b. Il existe alors un et un seul isomorphisme $f : a \times b \longrightarrow (a \times b)'$ tel que $p'_a \circ f = p_a$ et $p'_b \circ f = p_b$.*

Démonstration. Le diagramme ci-dessous résume tout.

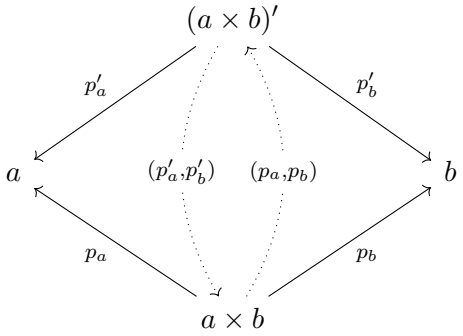


FIGURE 3 – Relations entre deux produits de a et b

Comme $(a \times b, p_a, p_b)$ est un produit de a et b, il existe une unique flèche $(p'_a, p'_b) : (a \times b)' \longrightarrow a \times b$ telle que

$$p'_a = p_a \circ (p'_a, p'_b) \quad \text{et} \quad p'_b = p_b \circ (p'_a, p'_b)$$

De même, comme $((a \times b)', p'_a, p'_b)$ est un produit de a et b, il existe une unique flèche $(p_a, p_b) : a \times b \longrightarrow (a \times b)'$ telle que

$$p_a = p'_a \circ (p_a, p_b) \quad \text{et} \quad p_b = p'_b \circ (p_a, p_b)$$

Considérons maintenant la flèche

$$f = (p'_a, p'_b) \circ (p_a, p_b) : a \times b \longrightarrow a \times b$$

Comme $(a \times b, p_a, p_b)$ est un produit de a et b, il existe une unique flèche $\varphi : a \times b \longrightarrow a \times b$ telle que

$$p_a = p_a \circ \varphi \quad \text{et} \quad p_b = p_b \circ \varphi$$

Or, f vérifie ces deux propriétés, et $\mathbb{1}_{a \times b}$ aussi, donc $f = \mathbb{1}_{a \times b}$. Ainsi,

$$(p'_a, p'_b) \circ (p_a, p_b) = \mathbb{1}_{a \times b}$$

De même,

$$(p_a, p_b) \circ (p'_a, p'_b) = \mathbb{1}_{(a \times b)'}$$

Ainsi, $(p_a, p_b) : a \times b \longrightarrow (a \times b)'$ est un isomorphisme et

$$(p_a, p_b)^{-1} = (p'_a, p'_b)$$

L'unicité de l'isomorphisme provient de la définition d'un produit : si $f : a \times b \longrightarrow (a \times b)'$ est une flèche telle que $p'_a \circ f = p_a$ et $p'_b \circ f = p_b$, alors $f = (p_a, p_b)$. □

Ce résultat admet une réciproque.

Proposition 9. *Soient a et b deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Si a et b admettent un produit $(a \times b, p_a, p_b)$, alors tous les objets de la catégorie $\mathcal{C}$ isomorphes à $a \times b$ sont aussi des produits de a et b.*

Démonstration. Soit $(a\times b)'$ un objet isomorphe à $a\times b$. Soit $\varphi : a \longrightarrow (a\times b)'$ un isomorphisme. Regardons le diagramme suivant, où l'on a posé $p'_a = p_a \circ \varphi^{-1}$ et $p'_b = p_b \circ \varphi^{-1}$

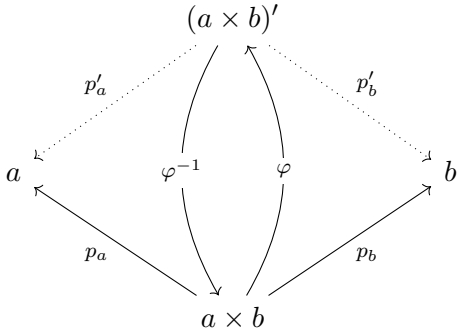


FIGURE 4 – Isomorphismes

Soit c un objet. Soient $f : c \longrightarrow a$ et $g : c \longrightarrow b$. Comme $(a \times b, p_a, p_b)$ est un produit de a et b, il existe une unique flèche $(f, g) : c \longrightarrow a \times b$ telle que $p_a \circ (f, g) = f$ et $p_b \circ (f, g) = g$. Posons

$$(f, g)' = \varphi \circ (f, g)$$

On a alors

$$p'_a \circ (f, g)' = p'_a \circ \varphi \circ (f, g) = p_a \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ (f, g) = p_a \circ (f, g) = f$$

et, de même,

$$p'_b \circ (f, g)' = g$$

On laisse en exercice le soin de montrer que $(f, g)'$ est la seule flèche vérifiant ces deux égalités. □

Que nous racontent ces théorèmes pour les catégories **Set** et $\mathcal{Z}$? Nous avons déjà vu que deux ensembles A et B de la catégorie **Set** admettent au moins un produit, à savoir $A\times B$. La seconde proposition nous dit que tous les ensembles isomorphes à $A \times B$ sont aussi des produits de A et B. Par exemple, $B \times A$, ou encore $A' \times B'$ où A, A' sont isomorphes et B, B' sont isomorphes. Il y a bien d'autres possibilités. Disons que le produit cartésien usuel $A \times B$ est le produit « canonique » de A et B.

Dans la catégorie $\mathcal{Z}$, nous avons vu que deux entiers relatifs a et b pas tous les deux nuls admettent exactement deux produits, qui sont opposés. Les produits de a et b sont les pgcd de a et b et, effectivement, les deux pgcd de a et b sont opposés, donc isomorphes dans la catégorie $\mathcal{Z}$.

3 Coproduits

Nous allons maintenant renverser les flèches. Le renversement des flèches est une activité extrêmement fructueuse en théorie des catégories : à chaque concept X de la théorie correspond un co-concept co-X. J'y reviendrai sans doute dans un futur article, lorsque je parlerai de *dualité*. Prenons la définition du produit de deux objets dans une catégorie, renversons les flèches, nous obtenons la définition du coproduit.

3.1 Qu'est-ce qu'un coproduit ?

Définition 5. Soient a et b deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un *coproduit* (ou une *somme*) de a et b est un triplet $(a+b, i_a, i_b)$ où $a+b$ est un objet, $i_a : a \longrightarrow a+b$ et $i_b : b \longrightarrow a+b$ sont deux flèches, vérifiant la propriété suivante. Pour tout triplet (c, f, g) où c est un objet, $f : a \longrightarrow c$ et $g : b \longrightarrow c$, il existe une unique flèche $[f, g] : a + b \longrightarrow c$ telle que $f = [f, g] \circ i_a$ et $g = [f, g] \circ i_b$.

Les flèches i_a et i_b s'appellent les *injections* de a et b dans $a + b$.

Remarque. Ne nous imaginons pas que les injections sont injectives ! De toute façon, la notion d'injection, au sens ensembliste du terme, au sens anglo-saxon *one to one*, n'a aucun sens dans une catégorie abstraite. En tout cas pour l'instant. Le prochain chapitre sera justement là pour pallier ce manque.

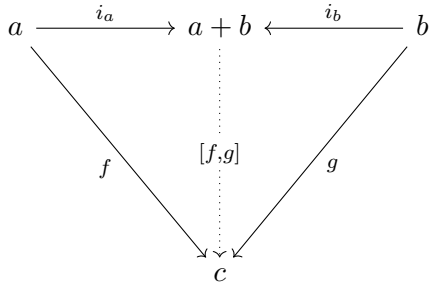


FIGURE 5 – Coproduit de deux objets

Nous ne reprendrons pas ce que nous avons montré pour les produits. Le coproduit, s'il existe, est unique à isomorphisme unique près, et tout objet isomorphe à un coproduit est encore un coproduit. Dans la catégorie $\mathcal{Z}$, on laisse en exercice le soin de montrer que les coproduits de deux entiers relatifs sont leurs plus petits multiples communs.

Intéressons-nous maintenant à la catégorie des ensembles.

3.2 La catégorie Set

Soient A et B deux ensembles. Un première idée qui nous vient à l'esprit est de prendre pour coproduit de A et B leur réunion $A \cup B$. Cela ne fonctionne en général pas. Nous allons introduire ce que l'on appelle *l'union disjointe* de A et B. L'idée est de faire la réunion, non pas de A et B, mais de deux ensembles disjoints A' et B' qui sont en bijection avec A et B. Le choix de A' et B' importe peu, nous allons prendre $A' = A \times \{0\}$ et $B' = B \times \{1\}$.

Définition 6. Étant donné deux ensembles A et B, *l'union disjointe de A et B* est

$$A + B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

Les éléments de $A + B$ sont donc de la forme $(x, 0)$ où $x \in A$, **OU BIEN** de la forme $(y, 1)$ où $y \in B$.

Définissons la fonction $i_A : A \longrightarrow A + B$ en posant, pour tout $x \in A$, $i_A(x) = (x, 0)$. De même, soit $i_B : B \longrightarrow A + B$ définie, pour tout $x \in B$, par $i_B(x) = (x, 1)$.

Proposition 10. *Pour tous ensembles A et B, $(A + B, i_A, i_B)$ est un coproduit de A et B.*

Démonstration. Soit C un ensemble. Soient $f : A \longrightarrow C$ et $g : B \longrightarrow C$. Supposons qu'il existe une fonction $[f, g] : A + B \longrightarrow C$ telle que $f = [f, g] \circ i_A$ et $g = [f, g] \circ i_B$. Soit $z \in A + B$. Il y a deux cas à considérer, qui s'excluent mutuellement.

- Cas 1, $z = (x, 0)$ où $x \in A$. On a alors

$$f(x) = [f, g](i_A(x)) = [f, g](x, 0) = [f, g](z)$$

- Cas 2, $z = (y, 1)$ où $y \in B$. On a alors

$$f(y) = [f, g](i_B(y)) = [f, g](0, y) = [f, g](z)$$

  On a donc l'unicité de $[f, g]$.

Inversement, on vérifie facilement que la fonction ci-dessus convient. □

Remarque. Revenons à la réunion de deux ensembles A et B. Il existe effectivement une flèche de A vers $A \cup B$ et une flèche de B vers $A \cup B$ qui sont la fonction $f : A \longrightarrow A \cup B$ définie par $f(x) = x$ et la fonction $g : B \longrightarrow A \cup B$ définie par $g(y) = y$. La propriété d'universalité du coproduit nous dit qu'il existe une unique fonction $[f, g] : A + B \longrightarrow A \cup B$ vérifiant certaines propriétés. Que vaut $[f, g]$? Facile, l'unique fonction $[f, g] : A+B \longrightarrow A \cup B$ telle que $f = [f, g] \circ i_A$ et $g = [f, g] \circ i_B$ est définie de la façon suivante. Pour tout $x \in A$, $[f, g](x, 0) = x$. Pour tout $y \in B$, $[f, g](y, 1) = y$.

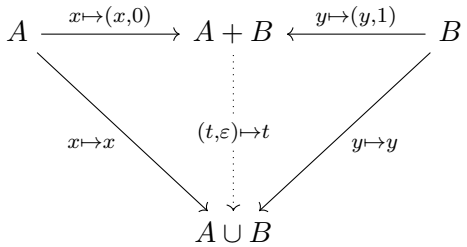


FIGURE 6 – Coproduit et réunion de deux ensembles

3.3 Remarque finale

Ce paragraphe peut-être sauté en première lecture. Il fait appel à la théorie des cardinaux transfinis.

Ne pourrait-il pas arriver que, dans certains cas, $A \cup B$ soit tout de même un coproduit de A et B ? Nos théorèmes généraux nous disent que c'est le cas si et seulement si $A \cup B \cong A + B$. Que dire de deux tels ensembles A et B ?

Supposons d'abord A et B finis. On a

$$|A + B| = |A| + |B| \quad \text{et} |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

où les barres verticales désignent les cardinaux des ensembles. Or, deux ensembles finis sont isomorphes si et seulement si ils ont le même cardinal. Ainsi, dans le cas où A et B sont finis, $A \cup B \cong A + B$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Supposons maintenant que l'un au moins des ensembles A et B est infini. Le lecteur pourra sauter les quelques lignes qui suivent, elles font intervenir la théorie des cardinaux transfinis.

Pour fixer les idées, $|B| \leq |A|$. On a toujours l'égalité $|A + B| = |A| + |B|$. Il s'avère qu'un théorème sur la somme de deux cardinaux transfinis nous dit que

$$|A| + |B| = \max(|A|, |B|) = |A|$$

Par ailleurs, $A \subseteq A \cup B$, donc

$$|A| \leq |A \cup B|$$

Également, un théorème général sur les cardinaux transfinis nous permet d'écrire

$$|A \cup B| \leq |A| + |B| = \max(|A|, |B|) = |A|$$

Les deux inégalités montrent que $|A \cup B| = |A|$. Ainsi,

$$|A \cup B| = |A + B|$$

On en déduit que $A \cup B \cong A + B$ et donc que $A \cup B$ est un coproduit de A et B.

Alors, tout ça pour dire que finalement, $A \cup B$ marcherait très bien , sauf si A et B sont finis et non disjoints ? En théorie oui, mais il y a un « mais ». Un coproduit de A est B est la donnée d'un ensemble **ET** de deux injections vérifiant certaines propriétés. Étant donnés deux ensembles A et B dont l'un au moins est infini, trouver explicitement ces deux injections en prenant $A \cup B$ pour le coproduit équivaut à trouver explicitement une bijection entre $A \cup B$ et la somme disjointe $A + B$. Quand on sait que les résultats sur les cardinaux transfinis que nous avons utilisés un peu plus haut découlent de l'axiome du choix, expliciter une telle bijection est une mission impossible.

4 Parties d'un ensemble

4.1 Introduction

Nous allons prendre dans cet section un nouvel exemple de catégorie. Soit E un ensemble. Nous allons définir une catégorie $\mathcal{P}$.

- Les objets de $\mathcal{P}$ sont les parties de E, c'est à dire les ensembles inclus dans E.
- Pour tous ensembles A, B inclus dans E, si $A \subseteq B$, alors il existe une unique flèche de domaine A et de codomaine B. Sinon, il n'existe aucune flèche de domaine A et de codomaine B.

Il reste à définir la composée de deux flèches. Soient $A, B, C \subseteq E$. Soit $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$. Ceci signifie que $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$. Par la transitivité de la relation $\subseteq$, on a aussi $A \subseteq C$. Il existe donc une unique flèche $h : A \longrightarrow C$. On pose $g \circ f = h$. De façon plus concise,

$$(B \longrightarrow C) \circ (A \longrightarrow B) = (A \longrightarrow C)$$

Proposition 11. *$\mathcal{P}$ est une catégorie.*

Démonstration. Pour tout $A \subseteq E$, on a $A \subseteq A$. Il existe donc une unique flèche $\mathbb{1}_A : A \longrightarrow A$. On montre ensuite facilement que les deux axiomes des catégories sont bien vérifiés. □

4.2 Isomorphismes

Dans la catégorie $\mathcal{P}$, la notion d'isomorphisme est particulièrement simple.

Proposition 12. *Deux objets de $\mathcal{P}$ sont isomorphes si et seulement si ils sont égaux.*

Démonstration. Soient $A, B \subseteq E$. Supposons $A \cong B$. Cela signifie qu'il existe $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow A$ telles que $g \circ f = \mathbb{1}_A$ et $f \circ g = \mathbb{1}_B$. L'existence des flèches f et g nous dit que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Par l'antisymétrie de la relation $\subseteq$, on a donc $A = B$. La réciproque est immédiate : toute partie A de E est isomorphe à elle-même, un (en fait l'unique) isomorphisme de A sur A est $\mathbb{1}_A$. □

4.3 Produits et coproduits

Proposition 13. *Pour tous $A, B \subseteq E$, A et B possèdent un unique produit qui est $A \cap B$.*

Démonstration. Soient $A, B \subseteq E$. On a $A \cap B \subseteq A$. Posons $p_A : A \cap B \longrightarrow A$. De même, posons $p_B : A \cap B \longrightarrow B$. Pour être plus précis que l'énoncé du théorème, montrons que $(A \cap B, p_A, p_B)$ est un produit de A et B.

Soit (C, f, g) un triplet tel que $C \subseteq E$, $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$. On a donc $C \subseteq A$ et $C \subseteq B$. De là, $C \subseteq A \cap B$. Il existe donc une flèche $(f, g) : C \longrightarrow A \cap B$. Cette flèche est évidemment unique, puisque dans notre catégorie, il existe au plus une flèche entre deux objets.

Ainsi, $A \cap B$ est un produit de A et B. Pour terminer, *les* produits de A et B sont les objets de $\mathcal{C}$ isomorphes à $A \cap B$. Mais $A \cap B$ n'est isomorphe qu'à lui-même. □

Proposition 14. *Pour tous $A, B \subseteq E$, A et B possèdent un unique coproduit qui est $A \cup B$.*

Démonstration. On fait un copier-coller de la preuve précédente et on renverse les flèches (c'est à dire, ici, les inclusions).

Soient $A, B \subseteq E$. On a $A \subseteq A \cup B$. Posons $i_A : A \longrightarrow A \cup B$. De même, posons $i_B : B \longrightarrow A \cup B$. Pour être plus précis que l'énoncé du théorème, montrons que $(A \cup B, i_A, i_B)$ est un coproduit de A et B.

Soit (C, f, g) un triplet tel que $C \subseteq E$, $f : A \longrightarrow C$ et $g : B \longrightarrow C$. On a donc $A \subseteq C$ et $B \subseteq C$. De là, $A \cup B \subseteq C$. Il existe donc une flèche $(f, g) : A \cup B \longrightarrow C$. Cette flèche est évidemment unique, puisque dans notre catégorie, il existe au plus une flèche entre deux objets.

Ainsi, $A \cup B$ est un coproduit de A et B. Pour terminer, *les* coproduits de A et B sont les objets de $\mathcal{C}$ isomorphes à $A \cup B$. Mais $A \cup B$ n'est isomorphe qu'à lui-même. □

4.4 Objets initiaux et objets finaux

Nous allons (apparemment) sauter du coq à l'âne. Reparlons de la notion d'objet initial vue dans le premier article, et introduisons la notion duale d'objet final dans une catégorie. Rappelons la définition d'objet initial.

Définition 7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet initial* de $\mathcal{C}$ est un objet i de $\mathcal{C}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout objet a de $\mathcal{C}$, il existe une et une seule flèche $i \longrightarrow a$.

En renversant les flèches, on obtient la définition d'un objet final.

Définition 8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet final* de $\mathcal{C}$ est un objet e de $\mathcal{C}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout objet a de $\mathcal{C}$, il existe une et une seule flèche $a \longrightarrow e$.

Nous avons déjà montré un théorème sur les objets initiaux dans le premier chapitre. Nous allons le rappeler et le compléter.

Proposition 15. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On suppose que $\mathcal{C}$ possède un objet initial i. Alors, les objets initiaux de $\mathcal{C}$ sont les objets de $\mathcal{C}$ isomorphes à i. De plus, entre deux objets initiaux de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul isomorphisme.*

Démonstration. Soit i' un objet initial de $\mathcal{C}$. Comme i est initial, il existe une unique flèche $f : i \longrightarrow i'$. De même, comme i' est initial, il existe une unique flèche $g : i' \longrightarrow i$. On a $g \circ f : i \longrightarrow i$. On a aussi $\mathbb{1}_i : i \longrightarrow i$. Or, i est initial, donc il existe une unique flèche $i :\longrightarrow i$. Ainsi, $g \circ f = \mathbb{1}_i$. De même, $f \circ g = \mathbb{1}_{i'}$. Ainsi, i et i' sont isomorphes.

Prenons maintenant un objet i' de $\mathcal{C}$ isomorphe à i. Soit $f : i \longrightarrow i'$ un isomorphisme. Soit a un objet de $\mathcal{C}$. Comme i est initial, il existe une unique flèche $h : i \longrightarrow a$. On vérifie alors facilement qu'il existe une unique flèche de domaine i' et de codomaine a, qui est $h \circ f^{-1}$. Ainsi, i' est initial.

Donnons-nous enfin deux objets initiaux i et i'. Par ce qui précède, il existe au moins un isomorphisme de i sur i'. De plus, comme i est initial, il existe une unique flèche $i \longrightarrow i'$ donc, a

fortiori, au plus un isomorphisme de i sur i'. $\square$

Proposition 16. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On suppose que $\mathcal{C}$ possède un objet final e. Alors, les objets finaux de $\mathcal{C}$ sont les objets de $\mathcal{C}$ isomorphes à i. De plus, entre deux objets finaux de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul isomorphisme.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Quels sont les objets initiaux et les objets finaux de notre catégorie $\mathcal{P}$?

Proposition 17. *La catégorie $\mathcal{P}$ possède un unique objet initial qui est $\emptyset$ et un unique objet final qui est E.*

Démonstration. Pour tout $A \subseteq E$, $\emptyset \subseteq A$. Il existe donc une flèche $\emptyset \longrightarrow A$. Cette flèche est unique parce que dans la catégorie $\mathcal{P}$ il existe au plus une flèche d'un objet vers un autre. Ainsi, $\emptyset$ est un objet initial de $\mathcal{P}$. Dans $\mathcal{P}$, isomorphisme équivaut à égalité, ne cherchons donc pas d'autre objet initial, il n'y en a pas.

Pour tout $A \subseteq E$, on a $A \subseteq E$. On laisse au lecteur le soin d'en déduire que E est l'unique objet final de $\mathcal{P}$. $\square$

Exercice. Nous avons vu dans le premier articles que $\emptyset$ est l'unique objet initial de la catégorie **Set**. Montrer que les objets finaux de cette catégorie sont les singletons.

Exercice. Montrer que les objets initiaux de la catégorie $\mathcal{Z}$ sont ± 1 et que son unique objet final est l'entier 0.

4.5 Généralisation : les ensembles partellement ordonnés

Ce que nous avons fait dans la catégorie $\mathcal{P}$ se généralise. Soit X un ensemble quelconque. Munissons X d'une relation d'ordre $\leq$, c'est à dire d'une relation réflexive, antisymétrique et transitive. On définit une catégorie $\mathcal{C}$ de la façon suivante.

- Les objets de $\mathcal{C}$ sont les éléments de X.
- Soient $a, b \in X$. Si $a \leq b$, alors il existe une unique flèche $a \longrightarrow b$. Sinon, il n'existe pas de flèche $a \longrightarrow b$.

On définit ensuite la composée de deux flèches par $(b \longrightarrow c) \circ (a \longrightarrow b) = (a \longrightarrow c)$. On vérifie facilement que l'on définit bien ainsi une catégorie. On a alors les propriétés suivantes :

- Par l'antisymétrie de $\leq$, isomorphisme $\iff$ égalité.
- Objet initial = plus petit élément de X (s'il existe).
- Objet final = plus grand élément de X (s'il existe).
- Produit $a \times b = \inf\{a, b\}$ (si cette borne inférieure existe).
- Coproduit $a + b = \sup\{a, b\}$ (si cette borne supérieure existe).

Exercice. Que deviennent ces résultats si $\leq$ est seulement un *préordre*, c'est à dire une relation réflexive et antisymétrique, mais pas forcément antisymétrique ? Il y pas mal de travail à fournir

ici. Par exemple, on ne peut plus parler de *la* borne inférieure de l'ensemble $\{a, b\}$. Il peut y avoir plusieurs bornes inférieures. Mais peut-être sont-elles isomorphes ? Etc.

5 Produits et coproduits (bis)

Peut-on généraliser les notions de produit et de coproduit à plus de deux objets ?

5.1 Produit d'une famille d'objets

Définition 9. Soit $\mathcal{F} = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Un *produit* de $\mathcal{F}$ est un couple $(\prod_{i\in I} a_i, (p_i)_{i\in I})$ où

- $\prod_{i\in I} a_i$ est un objet de $\mathcal{C}$.
- Pour tout $j \in I$, $p_j : \prod_{i\in I} a_i \longrightarrow a_j$

vérifiant la propriété suivante : pour tout couple $(c, (f_i)_{i\in I})$ où c est un objet et pour tout $i \in I$, $f_i : c \longrightarrow a_i$, il existe une unique flèche

$$(f_i)_{i\in I} : c \longrightarrow \prod_{i\in I} a_i$$

telle que pour tout $j \in I$,

$$f_j = p_j \circ (f_i)_{i\in I}$$

Le lecteur motivé montrera l'unicité du produit à isomorphisme près.

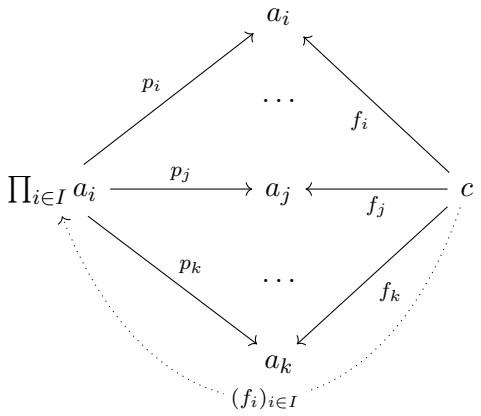


FIGURE 7 – Produit d'une famille d'objets

Dans **Set**, « le » produit est le produit cartésien. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles,

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} : \forall i \in I, a_i \in A_i\}$$

Dans $\mathcal{Z}$, le produit d'une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'entiers relatifs est leur pgcd généralisé. Posons

$$\sum_{i\in I} a_i\mathbb{Z} = \left\{ \sum_{i\in I} u_i a_i : \text{ les } u_i \in \mathbb{Z} \text{ presque tous nuls} \right\}$$

On vérifie facilement que cet ensemble est un idéal de $\mathbb{Z}$. Le pgcd des a_i est l'entier $\delta \in \mathbb{Z}$, unique au signe près, tel que

$$\sum_{i\in I} a_i\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$$

Dans $\mathcal{P}$, le produit d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E est leur intersection :

$$\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i$$

5.2 Coproduit d'une famille d'objets

On fait de même pour le coproduit en renversant les flèches.

Définition 10. Soit $\mathcal{F} = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Un *coproduit* de $\mathcal{F}$ est un couple $(\sum_{i\in I} a_i, (q_i)_{i\in I})$ où

- $\sum_{i\in I} a_i$ est un objet de $\mathcal{C}$.
- Pour tout $j \in I$, $q_j : a_j \longrightarrow \sum_{i\in I} a_i$

vérifiant la propriété suivante : pour tout couple $(c, (f_i)_{i\in I})$ où c est un objet et pour tout $i \in I$, $f_i : a_i \longrightarrow c$, il existe une unique flèche

$$[f_i]_{i\in I} : \sum_{i\in I} a_i \longrightarrow c$$

telle que pour tout $j \in I$,

$$f_j = [f_i]_{i\in I} \circ q_j$$

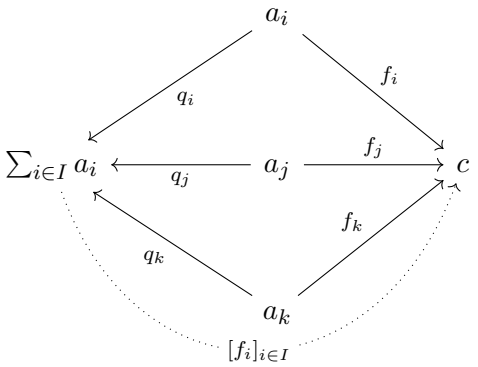


FIGURE 8 – Coproduit d'une famille d'objets

Dans **Set**, « le » coproduit est la somme disjointe généralisée. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On peut par exemple poser

$$\sum_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$$

Dans $\mathcal{Z}$, le coproduit d'une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'entiers relatifs est leur ppcm généralisé c'est à dire l'entier $\mu \in \mathbb{Z}$, unique au signe près, tel que

$$\bigcap_{i\in I} a_i\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$$

Dans $\mathcal{P}$, le coproduit d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E est leur réunion :

$$\sum_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$$

5.3 Produits et coproduits vides

Histoire de terminer en beauté, posons nous la question suivante. Le lecteur a probablement acquiescé docilement à toutes mes définitions. Fort bien. Nous avons parlé d'une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'objets d'une catégorie, sans jamais nous soucier de l'ensemble I des indices. Et si $I = \emptyset$? *Qu'est-ce qu'un produit vide* ? Reprenons scrupuleusement la définition du produit. Plaçons nous dans une catégorie $\mathcal{C}$. Soit $(a_i)_{i\in\emptyset}$ la famille vide (« la », car il n'y en a qu'une). Un produit de cette famille est un couple $(\prod_{i\in\emptyset} a_i, (p_i)_{i\in\emptyset})$. Posons

$$\pi = \prod_{i\in\emptyset} a_i$$

Cet objet reste à définir, nous ne savons même pas s'il existe. Pour les projections le problème est réglé, il s'agit de la famille de flèches vide. Passons à l'interprétation de la propriété universelle des produits. Soient c un objet et $(f_i)_{i\in\emptyset}$ une (en fait, la !) famille vide de flèches. Il existe alors une unique flèche $(f_i)_{i\in\emptyset} : \pi \longrightarrow c$. Une fois, enlevé le bruit, que reste-il ? Il reste que pour tout objet c, il existe une unique flèche $\pi \longrightarrow c$. La conclusion s'impose.

Proposition 18. *Les produits de la famille vide sont les objets initiaux.*

On laisse en exercice la preuve de la proposition ci-dessous.

Proposition 19. *Les coproduits de la famille vide sont les objets finaux.*

Le lecteur a pu se demander pourquoi, un peu plus haut, je me mettais à parler d'objets initiaux et d'objets finaux alors que le but de mon article était d'étudier les produits et les coproduits. Il a la réponse à sa question : les objets finaux et initiaux sont des produits et des coproduits.