Catégories

Marc Lorenzi

1er novembre 2026

Résumé

La théorie des catégories a été fondée, au milieu du XX^e siècle, par les mathématiciens Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane. Cet article tente modestement de répondre, de façon aussi élémentaire que possible, à quelques questions. Qu'est-ce qu'une catégorie ? Y a-t-il des exemples simples de catégories ? Et enfin, à quoi servent les catégories ?

1 Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Pour définir une catégorie, il nous faut

- Des « objets », que nous noterons a, b, c, ... La nature des objets est sans importance. Un formaliste dirait que ce sont des symboles abstraits sans aucune signification.
- Des « flèches » (on dit aussi *morphismes*), que nous noterons f, g, h, ... Tout comme les objets, les flèches peuvent être absolument n'importe quoi.

À chaque flèche f sont associés deux objets : son *domaine* et son *codomaine*. Nous noterons $f : a \longrightarrow b$ pour signifier que

- f est une flèche.
- Le domaine de f est l'objet a.
- Le codomaine de f est l'objet b.

Lorsque $f : a \longrightarrow b$, on dit aussi que f est une flèche *de a vers b*.

Étant données deux flèches $f : a \longrightarrow b$ et $g : b \longrightarrow c$ telles que le codomaine de f soit égal au domaine de g (il s'agit ici de l'objet b), on leur associe une unique flèche $g \circ f : a \longrightarrow c$, appelée la *composée* de f et g. Bien entendu, à chaque fois que l'on définit une catégorie, il s'agit de préciser ce que l'on entend exactement par $g \circ f$. La figure ci-dessous montre comment les flèches se combinent par composition.

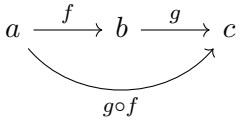


FIGURE 1 – Composée de deux flèches

Pour que les objets et les flèches forment une *catégorie*, on demande que les deux « axiomes » suivants, (A) et (I), soient vérifiés (il vaudrait mieux parler de propriétés que d'axiomes : à

chaque fois que nous construirons une catégorie, nous devrons montrer que l'on a bien (A) et (I)).

(A) Associativité : pour toutes flèches $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ et $h : c \longrightarrow d$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

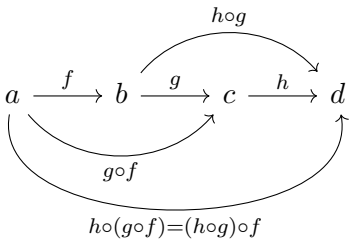


FIGURE 2 – L'axiome (A) d'associativité

(I) Identité : pour tout objet a, il existe une flèche $\mathbb{1}_a : a \longrightarrow a$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Pour toute flèche $f : a \longrightarrow b$, $f \circ \mathbb{1}_a = f$.
- Pour toute flèche $f : b \longrightarrow a$, $\mathbb{1}_a \circ f = f$.

La flèche $\mathbb{1}_a$ est appelée *l'identité de a*. On peut facilement montrer qu'une telle flèche est unique.

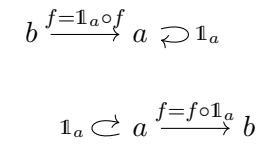


FIGURE 3 – L'axiome (I) d'identité.

Tout ceci est très abstrait. Nous allons maintenant regarder quelques exemples.

2 Quelques exemples

2.1 La catégorie des ensembles

La catégorie **Set** des ensembles est définie comme suit.

- Les objets de **Set** sont les ensembles.
- Les flèches de **Set** sont les fonctions. Le domaine d'une fonction est son ensemble de départ, son codomaine est son ensemble d'arrivée. Par exemple, si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction qui à tout entier naturel n associe le nombre réel $f(n) = \sqrt{n}$, le domaine de f est l'ensemble $\mathbb{N}$ et son codomaine est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Donnons-nous trois ensembles A, B, C, c'est à dire trois objets de la catégorie **Set** (je note les ensembles par des lettres majuscules, histoire de coller à l'usage. Mais rien ne m'y oblige, je

pourrais tout aussi bien les appeler a, b et c). La composée de la fonction $f : A \longrightarrow B$ et de la fonction $g : B \longrightarrow C$ est la fonction $g \circ f : A \longrightarrow C$ définie, pour tout $x \in A$, par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Théorème 1. Set *est une catégorie.*

Démonstration. Il nous faut vérifier les deux axiomes (A) et (I) des catégories.

- (A) Soient $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $h : C \longrightarrow D$ trois fonctions. On a $h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D$ et $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$. Soit $x \in A$. On a

  $$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

  Également,

  $$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

  Ainsi, pour tout $x \in A$,

  $$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

  ce qui prouve que

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (I) Pour tout ensemble A, définissons la fonction $\mathbb{1}_A : A \longrightarrow A$ par $\mathbb{1}_A(x) = x$ pour tout $x \in A$. Soit $f : A \longrightarrow B$. Soit $x \in A$. On a

  $$(f \circ \mathbb{1}_A)(x) = f(\mathbb{1}_A(x)) = f(x)$$

  et donc

  $$f \circ \mathbb{1}_A = f$$

  On montre de la même manière que pour toute fonction $f : B \longrightarrow A$, $\mathbb{1}_A \circ f = f$.

Ainsi, **Set** est une catégorie. □

2.2 Les catégories concrètes

Une catégorie concrète est une catégorie dont les objets sont des ensembles et les flèches sont des fonctions. La catégorie **Set** est, d'une certaine façon, la plus « grosse » catégorie concrète. En ne prenant que certains ensembles et certaines fonctions, on obtient des « sous-catégories » de **Set** qui sont fondamentales en mathématiques. Prenons un exemple.

Sans trop détailler, un *groupe* est un ensemble muni d'une opération vérifiant certaines propriétés (associativité, existence d'un élément neutre, inversibilité des éléments). Un *morphisme de groupes* est une fonction d'un groupe vers un autre groupe qui, d'une certaine façon, conserve les opérations. Par exemple, $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont deux groupes. La fonction « logarithme » $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes parce que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Le logarithme népérien est une « fonction magique » qui transforme les multiplications en additions, c'est cela la propriété de morphisme de groupes.

Note historique. Le mathématicien John Napier (Jean Neper) a passé des années à établir des tables de logarithmes (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614). Ce travail était atrocement fastidieux. Mais pourquoi s'est-il embarqué là dedans ? Eh bien parce que le logarithme est un morphisme de groupes. Effectuer des multiplications à la main est une tâche longue et difficile (multiplier deux nombres de 10 chiffres nécessite plusieurs centaines d'opérations sur des chiffres). En revanche, il est beaucoup plus facile d'additionner (quelques dizaines d'opérations). Grâce aux tables de Neper, le calcul de multiplications se ramenait au calcul d'additions. Johannes Kepler, en particulier, s'en est servi pour ses calculs astronomiques.

Comme disait Panurge, revenons à nos moutons. Si nous prenons pour objets les groupes et pour flèches les morphismes de groupes, nous obtenons une catégorie : la catégorie **Grp** des groupes. On peut de même définir la catégorie **Rng** des anneaux, la catégorie **Fld** des corps, la catégorie **Vec** des espaces vectoriels, etc. De façon très générale, à chaque type de structure algébrique correspond une catégorie.

Mais il n'y a pas que l'algèbre. Par exemple, un *espace topologique* est un ensemble muni d'une certaine structure qui permet de parler dans cet espace de limites, de continuité, bref de notions *d'analyse*. Si nous prenons pour objets les espaces topologiques et pour flèches les fonctions continues entre espaces topologiques, nous obtenons une nouvelle catégorie concrète, la catégorie **Top** des espaces topologiques. La branche des mathématiques qui étudie les propriétés de cette catégorie s'appelle la *topologie*. Il est enfin possible de mixer algèbre, analyse, etc : le mathématicien Alexandre Grothendieck travaillait dans le domaine de la *géométrie algébrique*, qui mêle géométrie, algèbre et topologie. Il a utilisé avec succès la théorie des catégories pour démontrer des résultats mathématiques profonds.

Prenons un dernier exemple de catégorie concrète. Un *ensemble ordonné* est un ensemble muni d'une relation $\leq$ qui permet de *comparer* ses éléments. Ici encore, une catégorie apparaît, elle est nommée en général **Pos** [1]. Les objets de la catégorie **Pos** sont les ensembles ordonnés, ses flèches sont les fonctions *croissantes*. Je n'en dirai pas plus, si ce n'est que le nom de cette catégorie provient de ce que, en anglais, « ensemble ordonné » se dit « Partially Ordered Set » (en abrégé, poset).

Y a-t-il des catégories pas concrètes, que nous pourrions appeler abstraites ? Évidemment, sinon ce ne serait pas rigolo.

2.3 Les ensembles ordonnés

Euh, mais nous avons déjà parlé de la catégorie concrète des ensembles ordonnés ? Certes, mais nous allons voir que **chaque** ensemble ordonné est, **à lui tout seul**, une catégorie à part entière. Et cette fois-ci, une catégorie abstraite. Je vais examiner un exemple, ce sera plus parlant.

1. Pourquoi pas **Ord** ? Eh bien parce que **Ord** est la catégorie des ordinaux.

Plaçons nous dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. La relation $\leq$ est une *relation d'ordre*. Elle vérifie en particulier les deux propriétés suivantes.

- Transitivité : pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$, si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.
- Réflexivité : pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \leq a$.

Nous allons définir une catégorie que nous noterons $\mathcal{N}_{\leq}$.

- Les objets de $\mathcal{N}_{\leq}$ sont les entiers naturels.
- Que sont les flèches ? Pour tous entiers naturels a et b, si $a \leq b$ il y a une unique flèche de domaine a et de codomaine b, que nous notons $f : a \longrightarrow b$ (ou g, ou h, de toute façon il n'y en a qu'une. *Du coup*, ce n'est même pas la peine de lui donner un nom !). En revanche, si $a \not\leq b$, il n'y a pas de flèche de domaine a et de codomaine b.

Par exemple, $1 \leq 3$ donc il existe une unique flèche de domaine 1 et de codomaine 3, la flèche $1 \longrightarrow 3$. En revanche, il n'y a aucune flèche de domaine 3 et de codomaine 1, parce que $3 \not\leq 1$.

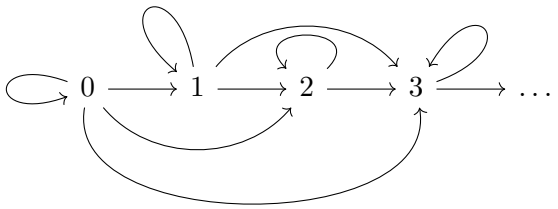


FIGURE 4 – La catégorie $\mathcal{N}_{\leq}$. On n'a dessiné que 4 objets et 10 flèches.

Maintenant, que signifie « composer » deux flèches ? Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$ et $b \leq c$. Avec nos notations catégoriques, il existe deux flèches (juste deux, et pas trois ou quatre !) $a \longrightarrow b$ et $b \longrightarrow c$. Comme la relation $\leq$ est transitive, on a $a \leq c$, et donc il existe une unique flèche $a \longrightarrow c$. Posons alors

$$(b \longrightarrow c) \circ (a \longrightarrow b) = (a \longrightarrow c)$$

Théorème 2. *$\mathcal{N}_{\leq}$ est une catégorie.*

Démonstration. Il nous faut vérifier les deux axiomes (A) et (I) des catégories.

- (A) Soient $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ et $h : c \longrightarrow d$ trois flèches de $\mathcal{N}_{\leq}$. Cela signifie, ni plus ni moins, que $a \leq b$, $b \leq c$ et $c \leq d$. Par la transitivité de $\leq$, on a donc aussi $a \leq d$. Notons $\ell : a \longrightarrow d$ l'unique flèche de domaine a et de codomaine d. On a alors

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (c \longrightarrow d) \circ ((b \longrightarrow c) \circ (a \longrightarrow b)) \\ &= (c \longrightarrow d) \circ (a \longrightarrow c) \\ &= a \longrightarrow d \\ &= \ell \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f &= ((c \longrightarrow d) \circ (b \longrightarrow c)) \circ (a \longrightarrow b) \\ &= (b \longrightarrow d) \circ (a \longrightarrow b) \\ &= a \longrightarrow d \\ &= \ell\end{aligned}$$

Ainsi, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ d'où (A).

- (I) Pour tout entier naturel a, la réflexivité de la relation $\leq$ nous dit que $a \leq a$. Avec nos notations catégoriques, posons $\mathbb{1}_a : a \longrightarrow a$, l'unique flèche de domaine a et de codomaine a. Soient a et b deux entiers naturels. Soit $f : a \longrightarrow b$. On suppose donc que $a \leq b$. On a alors

$$f \circ \mathbb{1}_a = (a \longrightarrow b) \circ (a \longrightarrow a) = a \longrightarrow b = f$$

De la même façon, si $f : b \longrightarrow a$ (on suppose donc $b \leq a$), alors

$$\mathbb{1}_a \circ f = (a \longrightarrow a) \circ (b \longrightarrow a) = b \longrightarrow a = f$$

Ainsi, $\mathcal{N}_{\leq}$ est une catégorie. $\square$

2.4 Les monoïdes

Considérons à nouveau l'ensemble $\mathbb{N}$ mais changeons totalement de point de vue. La multiplication dans $\mathbb{N}$ possède entre autres propriétés les deux propriétés suivantes.

- Associativité : pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- Existence d'un neutre : pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \times 1 = a$ et $1 \times a = a$.

Le mot mathématique pour exprimer cela est que $(\mathbb{N}, \times)$ est un *monoïde*. En fait, le mot « monoïde » provient de la théorie des catégories, voir un peu plus loin.

Nous allons définir une catégorie que nous noterons $\mathcal{N}_{\times}$.

- $\mathcal{N}_{\times}$ possède un unique objet. Le nom de cet objet n'a pas d'importance, appelons-le $\heartsuit$ [2].
- Les flèches de $\mathcal{N}_{\times}$ sont les entiers naturels.

Précisons un peu le second point : le nombre 3 est une flèche ? Mais quels sont son domaine et son codomaine ? Facile, vu que notre catégorie n'a qu'un objet. Nécessairement, $3 : \heartsuit \longrightarrow \heartsuit$. Mais aussi $7 : \heartsuit \longrightarrow \heartsuit$ ou $1729 : \heartsuit \longrightarrow \heartsuit$ [3].

2. J'ai tenté entre autres ■, ♠ et ♣, mais ce n'était pas satisfaisant. Ça faisait des tas de pâtés tout noirs sur les pages. J'ai un peu hésité à prendre ♢, mais après tout, l'objet ♡ est au cœur de notre catégorie, c'est donc le bon choix.

3. Comme chacun le sait, 1729 est le plus petit entier qui peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme de deux cubes : $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

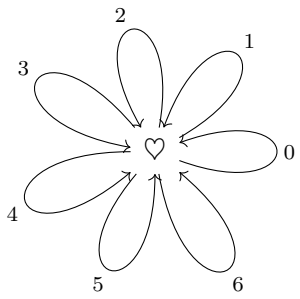


FIGURE 5 – La catégorie $\mathcal{N}_\times$. On n'a dessiné que 7 flèches (il y en a une infinité).

Exercice 1. Problème d'étymologie... Pourquoi $(\mathbb{N}, \times)$ est-il appelé un *monoïde* ?

Bon d'accord, nous avons les objets (ou plutôt l'objet) et les flèches. Il va maintenant falloir expliquer comment on compose les flèches. Ça fait combien, $2 \circ 5$ (ben non, cela ne fait pas GTI) ?

Définition 1. Pour tous $f, g \in \mathbb{N}$, on pose $g \circ f = f \times g$.

Par exemple, avec nos notations catégoriques, $2 : \heartsuit \longrightarrow \heartsuit$ et $5 : \heartsuit \longrightarrow \heartsuit$. Le codomaine de 2 est égal au domaine de 5, et on a aussi $2 \circ 5 : \heartsuit \longrightarrow \heartsuit$ (vu que notre catégorie a un unique objet). La définition nous dit que $2 \circ 5 = 5 \times 2 = 10 : \heartsuit \longrightarrow \heartsuit$.

Théorème 3. *$\mathcal{N}_\times$ est une catégorie.*

Démonstration. Il nous faut vérifier les deux propriétés des catégories.

(A) Soient $f, g, h \in \mathbb{N}$. On a

$$h \circ (g \circ f) = (g \circ f) \times h = (f \times g) \times h$$

L'addition des entiers est associative, donc

$$(f \times g) \times h = f \times (g \times h) = f \times (h \circ g) = (h \circ g) \circ f$$

Ainsi,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(I) Posons $\mathbb{1}_\heartsuit = 1$. Soit $f \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{1}_\heartsuit \circ f = f \times \mathbb{1}_\heartsuit = f \times 1 = f$$

De même,

$$f \circ \mathbb{1}_\heartsuit = \mathbb{1}_\heartsuit \times f = 1 \times f = f$$

Ainsi, $\mathcal{N}_\times$ est une catégorie. □

3 Propriétés universelles

À quoi sert la théorie des catégories ? À beaucoup de choses, mais entre autres à mettre en évidence des *propriétés universelles*, c'est à dire valables dans toutes les catégories (et donc, en ne m'avançant pas beaucoup, valables dans toutes les branches des mathématiques).

À titre d'illustration, je vais parler de l'une de ces propriétés universelles, le concept d'*objet initial*.

Définition 2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet initial* de $\mathcal{C}$ est un objet i vérifiant la propriété suivante : pour tout objet a de $\mathcal{C}$, il existe une unique flèche de domaine i et de codomaine a.

La figure ci-dessous montre 4 objets i, a, b, c, d'une catégorie. L'objet i est un objet initial. Les points d'exclamation sur les flèches expriment le fait que ces flèches sont uniques.

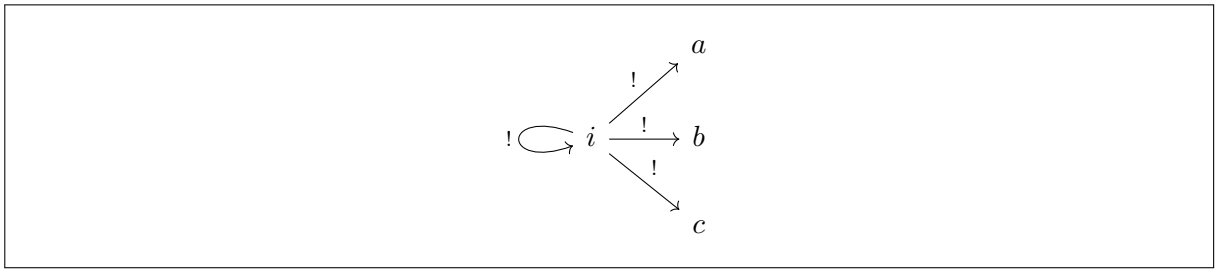


FIGURE 6 – Objet initial

Exercice 2. On rajoute à la catégorie dessinée ci-dessus un deuxième objet initial i'. Il faut alors rajouter 6 flèches. Lesquelles ?

Reprenons trois des catégories dont nous avons parlé plus haut : **Set**, $\mathcal{N}_{\leq}$ et $\mathcal{N}_{\times}$. Nous allons nous demander si ces catégories possèdent des objets initiaux, et si oui, lesquels.

3.1 La catégorie Set

Qu'est-ce qu'un objet initial de la catégorie **Set** ? C'est un ensemble I tel que pour tout ensemble A, il existe une unique fonction $I \longrightarrow A$. On peut montrer que le seul ensemble I qui possède cette propriété est $I = \emptyset$.

La catégorie **Set** *possède un unique objet initial : l'ensemble vide.*

3.2 La catégorie $\mathcal{N}_{\leq}$

Qu'est-ce qu'un objet initial de $\mathcal{N}_{\leq}$? C'est un élément i de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $i \leq a$. De façon plus explicite, c'est un entier naturel plus petit que tous les entiers naturels. C'est bien connu, il n'y a qu'un seul entier qui vérifie cela, l'entier 0.

La catégorie $\mathcal{N}_{\leq}$ possède un unique objet initial : l'entier 0.

3.3 La catégorie $\mathcal{N}_\times$

Rappelons que la catégorie $\mathcal{N}_\times$ possède un unique objet : ♡. L'objet ♡ est-il un objet initial de la catégorie $\mathcal{N}_\times$? Non. En effet, soit a un objet quelconque de $\mathcal{N}_\times$. Pas trop le choix : $a = ♡$. Existe-t-il une flèche de domaine ♡ et de codomaine ♡ ? Oui, **MAIS** : la définition d'objet initial nous dit : « il existe une **UNIQUE** flèche de domaine i et de codomaine a ». Or, il existe une infinité de flèches de domaine ♡ et de codomaine ♡. La conclusion s'impose.

La catégorie $\mathcal{N}_\times$ ne possède pas d'objet initial.

Il peut être frustrant de se dire que lorsqu'une catégorie n'a qu'un objet, celui-ci n'est pas initial (pour être précis, sauf si la catégorie n'a qu'une flèche). Mais c'est ainsi ...

3.4 Le cas général

De façon générale, une catégorie peut ne pas avoir d'objet initial. Elle peut aussi en avoir 1, 2, 3, ou même une infinité. Que peut-on dire des divers objets initiaux d'une catégorie ? Nous allons montrer que, d'une certaine façon, ils sont « très ressemblants ». Le terme exact est « isomorphes ».

Définition 3. Soient a et b deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un *isomorphisme* de a sur b est une flèche $f : a \longrightarrow b$ telle qu'il existe une flèche $g : b \longrightarrow a$ telle que $g \circ f = \mathbb{1}_a$ et $f \circ g = \mathbb{1}_b$.

Avec les notations ci-dessus, si $f : a \longrightarrow b$ est un isomorphisme de a sur b, alors $g : b \longrightarrow a$ est un isomorphisme de b sur a. On dit alors que les deux objets a et b sont *isomorphes*. Les exemples de catégories que nous avons rencontrés sont un peu trop pauvres pour pouvoir illustrer de façon spectaculaire la notion d'isomorphisme. Sans démonstration,

- Dans la catégorie **Set**, les isomorphismes sont les *bijections*.
- Dans la catégorie $\mathcal{N}_\leq$, les objets sont seulement isomorphes à eux-mêmes. Dit autrement, deux objets de $\mathcal{N}_\leq$ sont isomorphes si et seulement si ils sont égaux.
- Dans la catégorie $\mathcal{N}_\times$ il n'y a qu'un objet, ♡. Évidemment, ♡ est isomorphe à lui-même.

Théorème 4. *Soient i et i' deux objets initiaux d'une catégorie $\mathcal{C}$. Il existe un et un seul isomorphisme de i sur i'.*

Remarque. Il peut être instructif de regarder en même temps la démonstration du théorème et le dessin de la solution de l'exercice 2 qui se trouve à la page suivante.

Démonstration. Comme i est initial, il existe une unique flèche $f : i \longrightarrow i'$. De même, comme i' est initial, il existe une unique flèche $g : i' \longrightarrow i$. Considérons maintenant $h = g \circ f : i \longrightarrow i$. Remarquons que $\mathbb{1}_i : i \longrightarrow i$. Nous voici donc en présence de **deux** flèches de domaine i et de codomaine i. Or, i est initial, il existe donc **une seule** flèche de domaine i et de codomaine i. Ainsi, $h = \mathbb{1}_i$, c'est à dire

$$g \circ f = \mathbb{1}_i$$

De là même façon, on montre que

$$f \circ g = \mathbb{1}_{i'}$$

La flèche f est ainsi un isomorphisme de domaine i et de codomaine i', et sa réciproque est la flèche g.

Supposons maintenant que $f' : i \longrightarrow i'$ est un isomorphisme de domaine i et de codomaine i'. Comme i est un objet initial, il existe une unique flèche de domaine i et de codomaine i'. Or, f et f' sont deux telles flèches, donc $f = f'$. □

T'as voulu voir Vesoul et on a vu Vesoul [4]. Mais non, je n'irai pas plus loin ... La théorie des catégories est une théorie d'une colossale richesse, ces quelques lignes n'ont fait qu'effleurer le sujet.

4 Solution des exercices

Exercice 1. $(\mathbb{N}, \times)$ s'appelle un *monoïde* parce que la catégorie correspondante, $\mathcal{N}_\times$, possède *un seul* objet.

Exercice 2. On a repris les notations de la démonstration du théorème 4. La flèche f est l'unique (remarquer le point d'exclamation devant la lettre f) isomorphisme de i sur i'. La flèche g est l'unique isomorphisme de i' sur i.

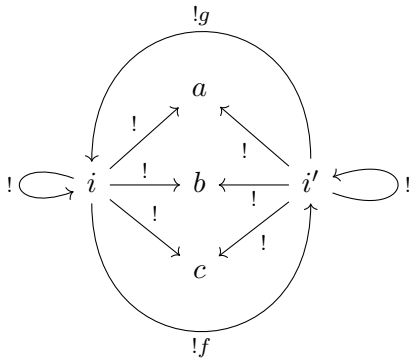


FIGURE 7 – Une catégorie avec deux objets initiaux.

4. Je ne suis jamais allé à Vesoul, je le regrette profondément.