

Zeta(2)

Marc Lorenzi

3 septembre 2026

Les livres de vulgarisation des mathématiques abondent de formules qualifiées d'incroyables, mystérieuses ou même magiques. Parmi ces formules magiques, on trouve souvent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Comme dirait le non-mathématicien, la somme des inverses des carrés des entiers est égale au sixième du carré de la circonférence d'un cercle de diamètre 1. Je vais dans cet article démontrer cette formule. N'y cherchez pas de cercles, il n'y en aura pas, en tout cas pas explicitement. Un minimum de connaissances en analyse est évidemment attendu du lecteur.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

1 Un polynôme remarquable

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Nous allons exprimer $\sin(2n+1)t$ au moyen d'un « polynôme en $\cotan t$ ». Pour cela, utilisons la formule de Moivre. On a

$$\cos(2n+1)t + i \sin(2n+1)t = (\cos t + i \sin t)^{2n+1}$$

Développons le membre de droite de l'égalité avec la formule du binôme de Newton.

$$(\cos t + i \sin t)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k t \cos^{2n+1-k} t$$

La partie imaginaire du membre de droite est obtenue en prenant $k = 2j+1$ impair. On a ainsi

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)t &= \sum_{0 \leq 2j+1 \leq 2n+1} \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j \sin^{2j+1} t \cos^{2n-2j} t \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} \sin^{2j+1} t \cos^{2n-2j} t \end{aligned}$$

Factorisons maintenant $\sin^{2n+1} t$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)t &= \sin^{2n+1} t \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} \sin^{2j-2n} t \cos^{2n-2j} t \\ &= \sin^{2n+1} t \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} \cotan^{2n-2j} t \end{aligned}$$

Posons

$$P_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} X^{n-j}$$

On a alors

$$\sin(2n+1)t = \sin^{2n+1} t P_n(\cotan^2 t)$$

Remarquons que $\deg P_n = n$. Le coefficient dominant de P_n est $\binom{2n+1}{1} = 2n+1$. Le coefficient de degré $n-1$ de P_n est

$$-\binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$$

Cela nous suffira dans ce qui va suivre.

2 Les racines du polynôme P_n

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $t_k = k\pi/(2n+1)$ et $x_k = \cotan^2 t_k$. On a $t_k \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et donc

$$\sin(2n+1)t_k = \sin^{2n+1} t_k P_n(x_k)$$

Les t_k appartiennent à l'intervalle $]0, \pi/2[$, donc $\sin t_k \neq 0$. De plus,

$$\sin(2n+1)t_k = \sin k\pi = 0$$

Ainsi, $P_n(x_k) = 0$. Les x_k sont donc des racines de P_n . Remarquons maintenant que la fonction $\cotan^2$ est injective sur $]0, \pi/2[$. Les t_k sont clairement distincts et appartiennent à cet intervalle, donc les x_k sont distincts deux à deux. Nous avons donc trouvé n racines de P_n , à savoir les x_k . Or, $\deg P_n = n$ donc P_n a au plus n racines. Ainsi, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses racines sont les x_k , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Que vaut la somme des racines de P_n ? Par les relations coefficients-racines,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= -\frac{\text{coef de } P \text{ de degré } n-1}{\text{coef de } P \text{ de degré } n} \\ &= \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)} \\ &= \frac{n(2n-1)}{3} \end{aligned}$$

3 Encadrements et passage à la limite

Soit $t \in]0, \pi/2[$. La fonction $\sin$ est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, t[$ tel que

$$\sin t - \sin 0 = (t - 0) \cos c$$

Comme $0 < c < t < \pi/2$, on a $\cos c < 1$ et donc

$$\sin t < t$$

De même, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction tangente entre 0 et t , on obtient

$$t < \tan t$$

Inversons et élevons au carré pour obtenir

$$\frac{1}{\tan^2 t} < \frac{1}{t^2} < \frac{1}{\sin^2 t}$$

ou encore

$$\cotan^2 t < \frac{1}{t^2} < 1 + \cotan^2 t$$

Appliquons ce résultats aux t_k . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_k = \cotan^2 t_k < \frac{1}{t_k^2} < 1 + \cotan^2 t_k = 1 + x_k$$

En sommant sur k , il vient

$$\sum_{k=1}^n x_k < \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k^2} < \sum_{k=1}^n (1 + x_k) = n + \sum_{k=1}^n x_k$$

d'où

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k^2} < n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

Remplaçons maintenant les t_k par leurs valeurs :

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} < \frac{2n(n+1)}{3}$$

d'où

$$(1) \quad \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{2n\pi^2(n+1)}{3(2n+1)^2}$$

Remarquons maintenant que

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \sim \frac{2n^2 \pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\frac{2n\pi^2(n+1)}{3(2n+1)^2} \sim \frac{2n^2 \pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

Le minorant et le majorant dans (1) tendent donc tous les deux vers $\pi^2/6$. En conclusion,

La série de terme général $1/k^2$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Il me reste à dire deux mots sur le titre de l'article : c'est quoi $\zeta(2)$? Donnons-nous un nombre complexe s et considérons la série

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$$

On définit ainsi une fonction ζ sur une partie de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. En notant D l'ensemble de définition de ζ , que vaut D ? Pour $s \in D$, que vaut $\zeta(s)$? Nous avons montré ici que $2 \in D$ et $\zeta(2) = \pi^2/6$. Et ensuite ? Ceci est une autre histoire...