

Racines d'un nombre réel

Marc Lorenzi

11 août 2026

1 Racine carrée

1.1 Introduction

Dans ce qui suit, on suppose que le lecteur connaît les principales propriétés algébriques de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un *corps ordonné*. Un autre exemple de corps ordonné est le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Il est bien connu que tout réel strictement positif possède exactement deux racines carrées, et que celles-ci sont opposées. En revanche, il est également bien connu que certains rationnels positifs, comme par exemple 2, ne possèdent pas de racine carrée rationnelle. Le corps $\mathbb{R}$ possède donc quelque chose de plus que le corps $\mathbb{Q}$, mais quoi précisément ? Cet article est là pour soulever quelques questions, et bien entendu pour y répondre. La première de ces questions est : qu'est-ce qu'une racine carrée ?

Définition 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Une *racine carrée* de x est un réel a tel que $a^2 = x$.

1.2 Unicité

Posons nous d'abord le problème de l'unicité de la racine carrée. Si un réel possède une racine carrée, combien en a-t-il ?

Comme $\mathbb{R}$ est un corps, il est aussi un *anneau intègre* : le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un de ces réels est nul. L'intégrité de $\mathbb{R}$ est la clé du comptage des racines carrées.

Proposition 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x possède une racine carrée a , alors les racines carrées de x sont $-a$ et a .

Démonstration. Supposons que x possède une racine carrée a . Soit $b \in \mathbb{R}$. Le réel b est une racine carrée de x si et seulement si $b^2 = a^2$, ou encore $(b - a)(b + a) = 0$. Par l'intégrité de $\mathbb{R}$, cette égalité équivaut à $b = \pm a$. $\square$

Remarque. Comme $0^2 = 0$ et $-0 = 0$, le réel 0 possède une unique racine carrée qui est 0.

Proposition 2. *Les réels strictement négatifs ne possèdent pas de racine carrée.*

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés de la relation $\leq$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a \geq 0$, alors $a^2 \geq 0$. Sinon, $-a \geq 0$ et $a^2 = (-a)^2 \geq 0$. Un carré n'est donc jamais strictement négatif. $\square$

1.3 Existence

Le plus intéressant reste à faire. Nous allons montrer qu'un réel strictement positif possède une racine carrée. Et donc, il en possède exactement deux, qui sont opposées.

Il existe plusieurs façons de montrer ce résultat. On peut utiliser des théorèmes puissants sur les fonctions continues, comme le théorème des valeurs intermédiaires. On peut aussi créer une suite de réels et montrer que cette suite converge vers une racine carrée de x . L'inconvénient de ces deux méthodes est qu'elles sont non-élémentaires, elles cachent la raison profonde de l'existence de la racine carrée. Quelle est la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ qui prouve l'existence de la racine ? Il s'agit de la *complétude au sens de Dedekind*.

Théorème 3. *$\mathbb{R}$ est un corps Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.*

De façon plus explicite, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et majorée, il existe un (et un seul) réel a tel que

- a majore E , c'est à dire pour tout $t \in E$, $t \leq a$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ est un majorant de E , alors $a \leq b$.

Ce résultat est en fait la raison d'être de l'ensemble $\mathbb{R}$. On peut montrer qu'il existe, à isomorphisme près, un et un seul corps ordonné Dedekind-complet. Si un corps ordonné est « plus petit » que $\mathbb{R}$ (par exemple $\mathbb{Q}$), il n'a pas assez d'éléments. S'il est « plus gros » (par exemple le corps ${}^*\mathbb{R}$ des hyperréels, mais je n'en dirai pas plus), il en a trop.

Dans toute la suite, x est un réel strictement positif fixé. Considérons l'ensemble

$$E = \{t \in \mathbb{R}_+^* : t^2 \leq x\}$$

Proposition 4. *E n'est pas vide.*

Démonstration. Soit $t = \frac{x}{x+1}$. En remarquant que $0 < t \leq 1$,

$$t^2 \leq t = \frac{x}{x+1} \leq x$$

Ainsi, $t \in E$. $\square$

Proposition 5. *E est majoré.*

Démonstration. Comme $x + 1 \geq 1$, on a pour tout $t \in E$,

$$t^2 \leq x \leq x + 1 \leq (x + 1)^2$$

De là,

$$(x + 1)^2 - t^2 = (x + 1 - t)(x + 1 + t) > 0$$

Or, $x + 1 + t > 0$, donc $x + 1 - t > 0$. Ainsi, E est majoré par $x + 1$. $\square$

L'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc E possède une borne supérieure a . Remarquons que $a > 0$ parce que $0 < x/(x+1) \leq a$. Nous allons montrer que $a^2 = x$. Comment ? Eh bien en montrant successivement que $a^2 \geq x$ et $a^2 \leq x$. Et comment va-t-on montrer ces inégalités ? Eh bien, par l'absurde.

Lemme 6. $a^2 \geq x$.

Démonstration. Supposons $a^2 < x$. Nous allons trouver un élément de E strictement plus grand que a . Ceci est absurde puisque a **majoré** E , et donc *tous les éléments de E sont inférieurs ou égaux à a* .

Soit $h \in]0, a[$. On a

$$(a + h)^2 - a^2 = h(2a + h) < 3ah$$

Prenons

$$h \leq \frac{x - a^2}{3a}$$

Pour respecter la condition $h \in]0, a[$, on peut prendre par exemple

$$h = \min \left(\frac{a}{2}, \frac{x - a^2}{3a} \right)$$

On a alors

$$(a + h)^2 - a^2 < x - a^2$$

et donc $(a + h)^2 \leq x$. Ainsi, $a + h \in E$. Or, $a < a + h$ et a majoré E , contradiction. $\square$

Lemme 7. $a^2 \leq x$.

Démonstration. Supposons $a^2 > x$. Nous allons trouver un majorant de E strictement plus petit que a . Ceci est absurde puisque a est le **plus petit** majorant de E , et donc *tous les majorants de E sont supérieurs ou égaux à a* .

Soit $h \in]0, a[$. On a

$$a^2 - (a - h)^2 = h(2a - h) < 2ah$$

Prenons

$$h = \frac{a^2 - x}{2a}$$

Comme $a^2 > x$ et $a > 0$, on a $h > 0$. De plus,

$$a - h = a - \frac{a^2 - x}{2a} = \frac{a^2 + x}{2a} > 0$$

et donc $h < a$. On a alors

$$a^2 - (a - h)^2 < a^2 - x$$

et donc $(a - h)^2 > x$. De là, pour tout $t \in E$,

$$t^2 \leq x < (a - h)^2$$

et donc

$$(a - h - t)(a - h + t) > 0$$

Comme $a - h + t > 0$, on a donc $a - h - t > 0$, ou encore $t < a - h$. Ainsi, $a - h$ majore E . Mais $a - h < a$ et a est le *plus petit* majorant de E , contradiction. $\square$

Nous y voilà. Nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème 8. *Tout réel positif possède une racine carrée.*

Pour résumer,

- Les réels strictement négatifs n'ont pas de racine carrée,
- 0 possède une unique racine carrée qui est 0,
- les réels strictement positifs ont exactement deux racines carrées, et celles-ci sont opposées.

Comme souvent en mathématiques, il n'a pas été facile de montrer l'existence de la racine carrée. Et cette preuve reposait sur une propriété profonde de l'ensemble $\mathbb{R}$. En revanche, la preuve de l'unicité était facile et reposait uniquement sur des propriétés élémentaires de $\mathbb{R}$. Enfin, je suis très fier d'avoir parlé pendant trois ou quatre pages de racines carrées, sans jamais écrire « $\sqrt{x}$ ».

2 Racine n ième

2.1 Introduction

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

Définition 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Une *racine n^e* de x est un réel a tel que $a^n = x$.

Évidences. Le réel 0 possède une unique racine n^e qui est 0. Tout réel x possède une unique racine 1^e qui est x .

Dans les démonstrations relatives à la racine carrée, nous avons souvent utilisé l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

vérifiée par tous les réels a et b . Ici, nous allons utiliser l'égalité plus générale

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

2.2 Unicité

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

Proposition 9. *Si n est impair, alors f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si n est pair, alors f est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f(x)$$

La fonction f est donc impaire si n est impair, et paire si n est pair. Pour déterminer la monotonie de f , il suffit donc de se placer sur $\mathbb{R}_+$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Supposons $x < y$. On a

$$f(y) - f(x) = y^n - x^n = (y - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Les termes de la somme ci-dessus sont positifs ou nuls, la somme l'est donc aussi. De plus, le terme pour $k = 0$ est $y^{n-1} > 0$, donc la somme n'est pas nulle. Ainsi, $f(y) - f(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. $\square$

Exercice. Si n est impair, nous avons montré que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et aussi sur $\mathbb{R}_-$. Pourquoi cela implique-t-il que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

Remarque. Pourquoi ne pas avoir bêtement dérivé f pour étudier sa monotonie ? J'ai dit un peu plus haut que je ne voulais pas utiliser de méthodes non-élémentaires, comme la notion de continuité ou celle de convergence des suites. A fortiori, je m'interdis la notion de dérivée : il se trouve que le lien entre le signe de la dérivée et la monotonie de la fonction est hautement non-élémentaire : ce lien est une conséquence du théorème des accroissements finis, qui est lui-même une conséquence du théorème de Rolle, qui est une conséquence du théorème sur l'image d'un segment par une fonction continue, qui est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass, qui est une conséquence ... de la Dedekind-complétude de $\mathbb{R}$. Ouf.

Proposition 10. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que x a une racine n^e a .*

- *Si n est impair, alors a est l'unique racine n^e de x .*
- *Si n est pair, alors x possède exactement deux racines n^es qui sont a et $-a$.*

Démonstration. Soit $b \in \mathbb{R}$.

- Supposons n impair. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc injective. De là, $b^n = x$ si et seulement si $f(b) = f(a)$ si et seulement si $b = a$.
- Supposons n pair. Cette fois-ci, la fonction f est injective sur $\mathbb{R}_+$ et injective sur $\mathbb{R}_-$. Le réel x a donc au plus une racine n^e négative et au plus une racine n^e positive. Il reste à remarquer que $(-a)^n = a^n = x$, donc les racines n^es de x sont a et $-a$.

$\square$

Débarrassons-nous maintenant des réels négatifs.

Proposition 11. Soit $x \in \mathbb{R}_*$.

- Si n est impair, alors x a une racine n^e (forcément unique car n est impair) si et seulement si $-x$ a une racine n^e . Les racines n^{es} de x et de $-x$ sont alors opposées.
- Si n est pair, alors x n'a pas de racine n^e .

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Supposons n impair. On a $a^n = x$ si et seulement si $(-a)^n = -x$, d'où le résultat.
- Supposons n pair. On a $a^n \geq 0$, donc $a^n \neq x$. Ainsi, x n'a pas de racine n^e .

□

2.3 Existence

Nous avons réglé le problème des réels négatifs. Nous allons dorénavant nous concentrer sur les réels strictement positifs. Dans toute la suite, x est un réel strictement positif fixé. Considérons l'ensemble

$$E = \{t \in \mathbb{R}_+^* : t^n \leq x\}$$

Proposition 12. E n'est pas vide.

Démonstration. Soit $t = \frac{x}{x+1}$. Comme $0 < t \leq 1$,

$$t^n \leq t = \frac{x}{x+1} \leq x$$

Ainsi, $t \in E$. □

Proposition 13. E est majoré.

Démonstration. On a $x+1 \geq 1$ et donc, pour tout $t \in E$,

$$t^n \leq x < x+1 \leq (x+1)^n$$

De là,

$$(x+1)^n - t^n = (x+1-t) \sum_{k=0}^{n-1} t^k (x+1)^{n-k} > 0$$

La somme ci-dessus est strictement positive, donc $x+1-t > 0$. Ainsi, E est majoré par $x+1$. □

L'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc E possède une borne supérieure a . Remarquons que $a > 0$ parce que $0 < x/(x+1) \leq a$. Nous allons montrer que $a^n = x$.

Lemme 14. $a^n \geq x$.

Démonstration. Supposons $a^n < x$. Soit $h \in]0, a[$. On a

$$\begin{aligned}(a+h)^n - a^n &= h \sum_{k=0}^{n-1} (a+h)^k a^{n-1-k} \\ &< h \sum_{k=0}^{n-1} (2a)^k a^{n-1-k} \\ &= ha^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= h(2^n - 1)a^{n-1}\end{aligned}$$

Prenons

$$h \leq \frac{x - a^n}{(2^n - 1)a^{n-1}}$$

Pour respecter la condition $h \in]0, a[$, on peut prendre par exemple

$$h = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{x - a^n}{(2^n - 1)a^{n-1}}\right)$$

On a alors

$$(a+h)^n - a^n < x - a^n$$

et donc $(a+h)^n < x$. Ainsi, $a+h \in E$. Or, $a < a+h$ et a majore E , contradiction. $\square$

Lemme 15. $a^n \leq x$.

Démonstration. Supposons $a^n > x$. Soit $h \in]0, a[$. On a

$$\begin{aligned}a^n - (a-h)^n &= h \sum_{k=0}^{n-1} (a-h)^k a^{n-1-k} \\ &< h \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} \\ &= nha^{n-1}\end{aligned}$$

Prenons

$$h \leq \frac{a^n - x}{na^{n-1}}$$

Pour respecter la condition $h \in]0, a[$, on peut prendre par exemple

$$h = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{a^n - x}{na^{n-1}}\right)$$

On a alors

$$a^n - (a-h)^n < a^n - x$$

et donc $(a-h)^n > x$. De là, pour tout $t \in E$,

$$t^n \leq x < (a-h)^n$$

et donc

$$(a - h - t) \sum_{k=0}^{n-1} (a - h)^k t^{n-1-k} > 0$$

La somme ci-dessus est strictement positive, on a donc $a - h - t > 0$, ou encore $t < a - h$. Ainsi, $a - h$ majore E . Mais $a - h < a$ et a est le *plus petit* majorant de E , contradiction. $\square$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Théorème 16. *Tout réel positif possède une racine n^e .*

Pour résumer,

- Si n est impair, alors tous les réels possèdent une et une seule racine n^e .
- Si n est pair, alors
 - Les réels strictement négatifs n'ont pas de racine n^e ,
 - 0 possède une unique racine n^e qui est 0,
 - les réels strictement positifs ont exactement deux racines n^{es} , et celles-ci sont opposées.

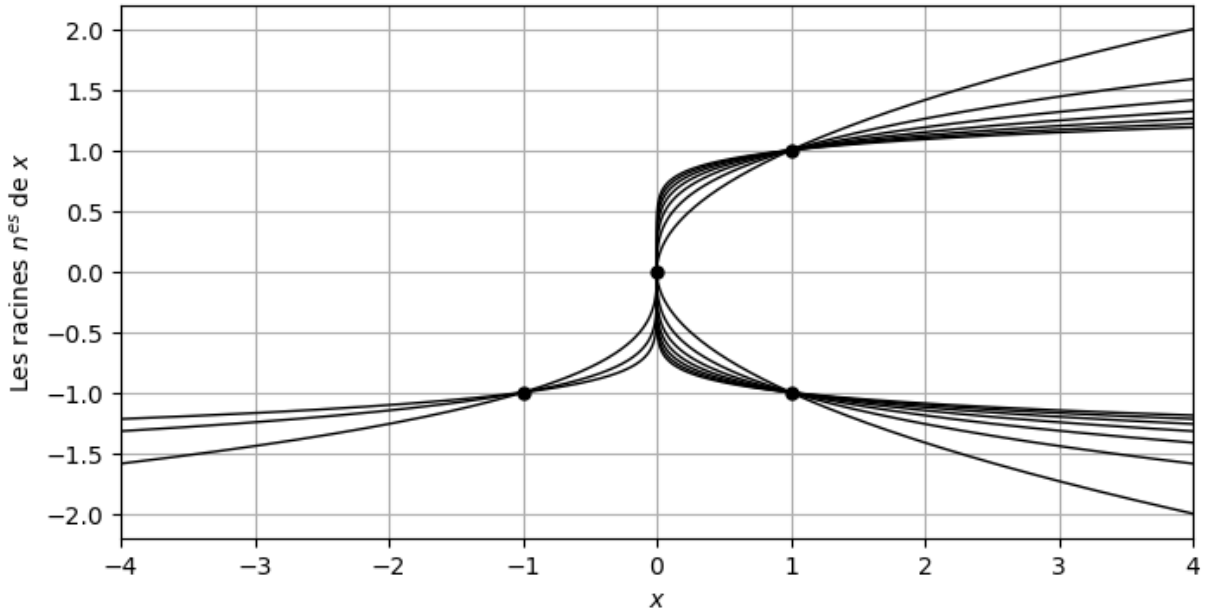


FIGURE 1 – Les racines n^{es} de x pour $x \in [-4, 4]$ et $n \in \llbracket 2, 8 \rrbracket$.