e est transcendant

Marc Lorenzi

15 août 2026

1 Nombres algébriques, nombres transcendants

Définition 1. Un nombre réel est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Sinon, il est *transcendant*.

Par exemple, tout rationnel x est algébrique car il est racine du polynôme $X - x \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$. Autre exemple, $\sqrt[3]{2}$ est racine de $X^3 - 2$ et est donc algébrique. Moins évident, $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique car racine de $X^4 - 10X^2 + 1$. Il est facile de donner des exemples de nombres algébriques. Georg Cantor a montré que, d'une certaine façon, la « quasi-totalité » des nombres réels sont transcendants. Et pourtant, il est la plupart du temps difficile de montrer qu'un réel donné est transcendant.

Nous allons dans cet article montrer que le réel e, base de l'exponentielle, est transcendant. Ce résultat a été démontré par Charles Hermite en 1873.

2 La transcendance de e

2.1 Préliminaires

Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ de degré $m \in \mathbb{N}$, on associe à P le polynôme

$$Q = \sum_{k=0}^{m} P^{(k)}$$

On associe également à P la fonction $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$R(\alpha) = e^{\alpha} \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x)\, dx$$

La fonction R est bien définie même si $P = 0$. Dans ce cas, on a aussi $R = 0$.

Dans toute la suite, nous nous conformerons à ces notations : le polynôme P, le degré m de P, le polynôme Q et la fonction R associés à P. Nous ne le répéterons pas à chaque fois.

Proposition 1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$R(\alpha) = e^{\alpha} Q(0) - Q(\alpha)$$

Démonstration. Posons plus précisément $R(\alpha) = R(P, \alpha)$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} R(P,\alpha) &= e^{\alpha}\left(\left[-e^{-\alpha x}P(\alpha x)\right]_0^1 + \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x}P'(\alpha x)\,dx\right) \\ &= -P(\alpha) + e^{\alpha}P(0) + R(P',\alpha) \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} R(P^{(k)},\alpha) &= -\sum_{k=0}^{m} P^{(k)}(\alpha) + e^{\alpha}\sum_{k=0}^{m} P^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{m} R(P^{(k+1)},\alpha) \\ &= -Q(\alpha) + e^{\alpha}Q(0) + \sum_{k=1}^{m+1} R(P^{(k)},\alpha) \end{aligned}$$

En simplifiant les sommes dans les deux membres de l'égalité, il reste

$$R(P,\alpha) = -Q(\alpha) + e^{\alpha}Q(0) + R(P^{(m+1)},\alpha)$$

Or, $\deg P = m$, donc $P^{(m+1)} = 0$, d'où $R(P^{(m+1)},\alpha) = 0$. □

2.2 Preuve par l'absurde !

Supposons que e est algébrique. Dans 5 pages, nous arriverons à une contradiction ... Il existe donc un polynôme $A \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $A(e) = 0$. En multipliant les coefficients de A par un multiple commun de leurs dénominateurs, on peut supposer $A \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. Enfin, quitte à diviser A par une puissance de X, on peut supposer $A(0) \neq 0$. En posant $n = \deg A$, nous pouvons donc écrire

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où $n \geq 1$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ et enfin $a_n \neq 0$. Dorénavant, A, n, les a_k sont fixés.

Étant donné un entier $p \geq 2$, considérons le polynôme

$$P = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{k=1}^{n}(X-k)^p$$

Le polynôme P dépend évidemment de l'entier p. Notons que le degré de P est $m = np + p - 1$. La clé de la recherche d'une contradiction dans l'hypothèse que e est algébrique consistera à choisir très judicieusement l'entier p. Mais patience, la route est encore longue.

Proposition 2.

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) = -\sum_{j=0}^{n} a_j R(j)$$

Démonstration. Par la proposition 1,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} a_j R(j) &= Q(0)\sum_{j=0}^{n} a_j e^j - \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \\ &= Q(0)A(e) - \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)\end{aligned}$$

Or, $A(e) = 0$, d'où le résultat. □

2.3 Les dérivées de P

Nous allons maintenant nous intéresser aux dérivées successives du polynôme P.

Proposition 3.

- *Pour tout* $r \in [\![0, p-2]\!]$, $P^{(r)}(0) = 0$.
- *Pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $r \in [\![0, p-1]\!]$, $P^{(r)}(j) = 0$.

Démonstration. En effet, 0 et racine de P d'ordre $p-1$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, j est racine de P d'ordre p. □

Proposition 4.

$$P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np} n!^p$$

Démonstration. Le coefficient de P de degré $p-1$ est

$$c = \frac{1}{(p-1)!}\prod_{k=1}^{n}(-k)^p = \frac{(-1)^{np} n!^p}{(p-1)!}$$

Par la formule de Taylor, on a aussi

$$c = \frac{P^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}$$

d'où le résultat. □

Proposition 5. *Pour tout entier* $r \geq p$, *le polynôme* $P^{(r)}$ *est un polynôme dont les coefficients sont des entiers multiples de* p.

Démonstration. Considérons le polynôme

$$S = (p-1)!P$$

Le polynôme S est un polynôme à coefficients entiers, de même degré m que P. Écrivons

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$$

où les $b_i \in \mathbb{Z}$ sont presque tous nuls (en fait, nuls si $i \geq m+1$). Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la dérivée r^e du polynôme S est

$$\begin{aligned} S^{(r)} &= \sum_{i=r}^{\infty} \frac{i!}{(i-r)!} b_i X^{i-r} \\ &= r! \sum_{i=r}^{\infty} \binom{i}{r} b_i X^{i-r} \end{aligned}$$

De là,

$$P^{(r)} = \frac{r!}{(p-1)!} \sum_{i=r}^{\infty} \binom{i}{r} b_i X^{i-r}$$

Pour tout $i \geq r$, $\binom{i}{r} b_i \in \mathbb{N}$. De plus, comme $r \geq p$, $r!/(p-1)!$ est un entier multiple de p. □

2.4 Combinaisons de valeurs de Q

Proposition 6. *$\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j) \in p\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On a

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=0}^{m} P^{(k)}(j)$$

Par la proposition 3, les termes de la somme sur k sont nuls pour $k \leq p-1$. Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=p}^{m} P^{(k)}(j)$$

Par la proposition 5, si $k \geq p$, alors $P^{(k)}$ est un polynôme à coefficients entiers multiples de p et donc $P^{(k)}(j)$ est un entier multiple de p, d'où le résultat. □

Proposition 7. *Pour tout p premier assez grand, $a_0 P^{(p-1)}(0) \notin p\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit p un entier premier strictement supérieur à $|a_0|$ et à n. Par la proposition 4,

$$a_0 P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np} a_0 n!^p$$

Par notre choix de p, l'entier p ne divise pas a_0 et il ne divise aucun des facteurs de $n!$. Comme p est premier, il ne divise donc pas $a_0 P^{(p-1)}(0)$. □

Proposition 8. *Pour tout p premier assez grand,*

$$\left| \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \right| \geq 1$$

Démonstration. On a

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) = a_0 Q(0) + \sum_{j=1}^{n} a_j Q(j)$$

Par la proposition 6, la somme du membre de droite est un multiple de p. Par la proposition 3, toutes les dérivées de P jusqu'à l'ordre $p-2$ s'annulent en 0. On a donc

$$\begin{aligned} a_0 Q(0) &= a_0 \sum_{k=0}^{m} P^{(k)}(0) \\ &= a_0 \sum_{k=p-1}^{m} P^{(k)}(0) \\ &= a_0 P^{(p-1)}(0) + a_0 \sum_{k=p}^{m} P^{(k)}(0) \end{aligned}$$

Prenons p premier assez grand pour que la conclusion de la proposition 7 soit vérifiée. Comme p est premier, par la proposition 5, la somme du membre de droite est un entier multiple de p. De plus, par la proposition 7, $a_0 P^{(p-1)}(0) \notin p\mathbb{Z}$. Ainsi, $a_0 Q(0)$ n'est pas un multiple de p. En regroupant le tout, on conclut que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \notin p\mathbb{Z}$$

et donc que cette somme est non nulle. □

2.5 Combinaisons de valeurs de R

Proposition 9. *Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,*

$$|R(j)| \leq \frac{e^n \left(n^{n+1}\right)^p}{n(p-1)!}$$

Démonstration. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On a

$$R(j) = e^j \int_0^1 j e^{-jx} P(jx)\, dx$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, $jx \in [0, n]$. De là, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$-n \leq jx - k \leq n$$

et donc

$$\begin{aligned} |P(jx)| &= \frac{(jx)^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{k=1}^{n} |jx - k|^p \\ &\leq \frac{n^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{k=1}^{n} n^p \\ &= \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} |R(j)| &\leq e^j \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!} \int_0^1 j e^{-jx}\, dx \\ &= e^j \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!} \left(1 - e^{-j}\right) \\ &\leq \frac{e^n n^{np+p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 10. *Pour tout entier p assez grand,*

$$\left| \sum_{j=0}^{n} a_j R(j) \right| < 1$$

Démonstration. Par la proposition 9,

$$\left| \sum_{j=0}^{n} a_j R(j) \right| \leq \frac{e^n \left(n^{n+1}\right)^p}{n(p-1)!} S$$

où $S = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$. Lorsque p tend vers l'infini,

$$\left(n^{n+1}\right)^p = o((p-1)!)$$

Ainsi, le majorant tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. D'où le résultat, en utilisant la définition de limite. □

2.6 La conclusion

Théorème 11. *e est transcendant.*

Démonstration. Par la proposition 8, il existe un entier N' tel que pour tout p premier supérieur à N',

$$(1) \quad \left| \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \right| \geq 1$$

Par la proposition 10, il existe un entier N'' tel que pour tout p supérieur à N'',

$$(2) \quad \left| \sum_{j=0}^{n} a_j R(j) \right| < 1$$

Soit $N = \max(N', N'')$. Soit p un entier premier supérieur à N. Un tel p existe, car l'ensemble des nombres premiers est infini. On a à la fois (1) et (2). Or, par la proposition 2,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) = -\sum_{j=0}^{n} a_j R(j)$$

et donc

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)\right| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_j R(j)\right|$$

Contradiction. L'hypothèse « e est algébrique » est fausse, donc e est transcendant. □

La figure ci-dessous montre les dépendances entre les propositions. Une flèche de la proposition a vers la proposition b indique que la proposition b utilise la proposition a.

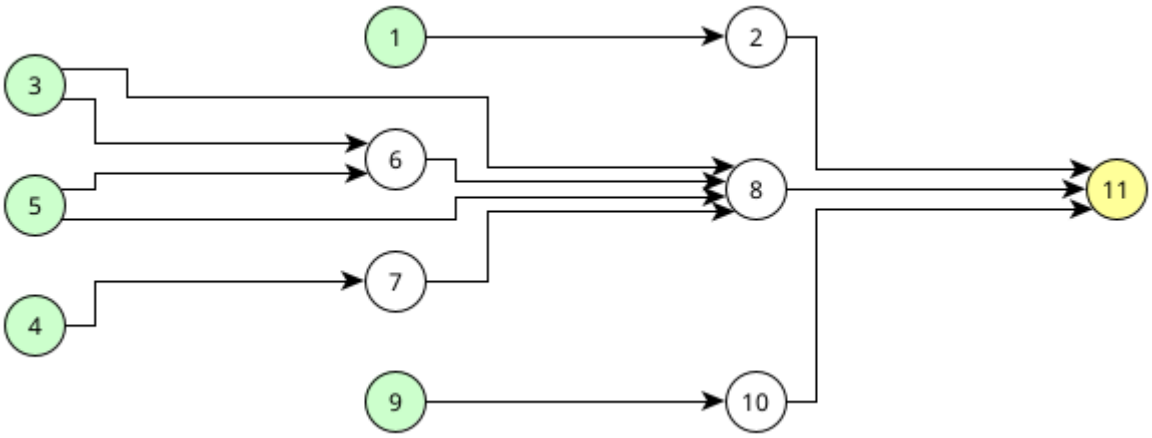

FIGURE 1 – Les dépendances entre les propositions.