

Le théorème de d'Alembert-Gauss

Marc Lorenzi

16 août 2026

L'une des motivations principales pour la construction du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est que certains nombres réels, comme -1 , ne possèdent pas de racine carrée. Dit autrement, le polynôme $P = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ne possède pas de racine. Une fois le corps $\mathbb{C}$ construit, le polynôme $P = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ possède deux racines qui sont $\pm i$. Il est alors facile de prouver que *tous* les polynômes de degré 2 possèdent une racine complexe. En revanche, il n'y a aucune raison *a priori* pour que *tous* les polynômes, de degrés 1, 2, 3, 4, 5, ... possèdent une racine complexe. Et pourtant, c'est le cas : le corps $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Théorème 1. [D'ALEMBERT-GAUSS]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Le polynôme P admet alors une racine.

Commençons par montrer deux lemmes.

Lemme 2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module assez grand, $|P(z)| \geq |P(0)|$.*

Démonstration. Posons

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

où $n \geq 1$ est le degré de P , $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n||z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \\ &\geq |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \end{aligned}$$

De là, pour $z \neq 0$,

$$\frac{|P(z)|}{|z|^n} \geq |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{k-n}$$

Lorsque $|z|$ tend vers l'infini, le minortant tend vers $|a_n|$. Plus explicitement, il existe $R' > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| \geq R'$ alors

$$\frac{|P(z)|}{|z|^n} \geq \frac{1}{2}|a_n|$$

De là, si $|z| \geq R'$, alors

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$$

Le minorant tend cette fois vers $+\infty$. Il existe ainsi $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| \geq R$, alors

$$|P(z)| \geq |P(0)|$$

□

Lemme 3. La fonction $f : z \mapsto |P(z)|$ possède un minimum global sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit D le disque fermé de centre 0 et de rayon R . La fonction f est continue sur le compact D , elle y admet donc un minimum. Il existe donc $z_0 \in D$ tel que pour tout $z \in D$ on ait $|P(z_0)| \leq |P(z)|$. Remarquons que comme $0 \in D$, on a $|P(z_0)| \leq |P(0)|$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \in D$, alors $|P(z)| \leq |P(z_0)|$. Sinon, par définition de R , $|P(z)| \geq |P(0)| \geq |P(z_0)|$. Ainsi, f admet en z_0 un minimum global. □

Dans la suite, nous fixons $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |P(z_0)|$. Nous pouvons maintenant prouver le théorème de d'Alembert-Gauss en montrant que $P(z_0) = 0$.

Démonstration. Par la formule de Taylor pour les polynômes, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i$$

Soit

$$E = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : P^{(i)}(z_0) \neq 0\}$$

Comme $n = \deg P$, le polynôme $P^{(n)}$ est constant, non nul et donc $n \in E$. Ainsi, $E \neq \emptyset$. Posons $k = \min E$ et $w = P^{(k)}(z_0)/k!$. On a donc

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{i=k}^n \frac{P^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i = P(z_0) + w(z - z_0)^k + (z - z_0)^k \varepsilon(z - z_0)$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque $|t|$ tend vers 0.

Posons $z = z_0 + re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Il vient

$$P(z_0 + re^{i\theta}) = P(z_0) + wr^k e^{ik\theta} + r^k \varepsilon(r)$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0. De là,

$$\begin{aligned} |P(z_0 + re^{i\theta})|^2 &= \left(P(z_0) + wr^k e^{ik\theta} + r^k \varepsilon(r) \right) \left(\overline{P(z_0)} + r^k e^{-ik\theta} \overline{w} + r^k \overline{\varepsilon(r)} \right) \\ &= |P(z_0)|^2 + Ar^k + r^k \varepsilon(r) \end{aligned}$$

où

$$A = e^{ik\theta} \overline{P(z_0)} w + e^{-ik\theta} P(z_0) \overline{w} = 2\operatorname{Re} \left(e^{ik\theta} \overline{P(z_0)} w \right)$$

Il est grand temps de faire une hypothèse absurde.

Supposons $P(z_0) \neq 0$. On a donc $\overline{P(z_0)}w \neq 0$. Posons

$$\overline{P(z_0)}w = ae^{i\alpha}$$

où $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$A = 2\operatorname{Re}(ae^{i(k\theta+\alpha)}) = 2a \cos(k\theta + \alpha)$$

et donc

$$|P(z_0 + re^{i\theta})|^2 = |P(z_0)|^2 + 2a \cos(k\theta + \alpha)r^k + r^k \varepsilon(r)$$

d'où, pour $r \neq 0$,

$$\frac{1}{r^k}(|P(z_0 + re^{i\theta})|^2 - |P(z_0)|^2) = 2a \cos(k\theta + \alpha) + \varepsilon(r)$$

Choisissons θ de sorte que $\mu = \cos(k\theta + \alpha) < 0$. Lorsque r tend vers 0, le membre de gauche tend vers μ . Pour tout r suffisamment petit, on a donc

$$|P(z_0 + re^{i\theta})|^2 < |P(z_0)|^2$$

Contradiction, puisque $|P|$ est minimal en z_0 . Ainsi, $P(z_0) = 0$. $\square$